BOLETÍN DE LOS OBSERVATORIOS DE TONANTZINTLA Y TACUBAYA, VOL. 2, N°11, 1954.

EL EFECTO DEL MATERIAL ABSORBENTE SOBRE EL NUMERO OBSERVADO DE LAS ESTRELLAS QUE ENVUELVE. I.

*Paris Pişmiş**

Resumen

Se ha calculado el porcentaje de las estrellas que se observarían en diferentes intervalos de magnitud, en dos regiones cerradas y semejantes en todas sus características, excepto la constante de absorción que se supone considerablemente más alta en una de las dos regiones. El problema se ha simplificado mediante suposiciones adecuadas y los cálculos están hechos para varias combinaciones de valores de parámetros, tales como la dispersión de las magnitudes absolutas, la constante de absorción, etc. Como resultado principal se encuentra que el aumento del número de estrellas observadas —al extender las observaciones a magnitudes débiles— es más rápido para la región oscurecida.

En algunos trabajos recientemente publicados[1, 2] he encontrado sugerencias de que el aumento más rápido del número de estrellas observadas en una región (al extender las observaciones a estrellas más débiles) con respecto a otra región en donde el aumento es menos rápido, puede ser debido a la transparencia relativa de la primera región con respecto a la segunda. En el caso de los conteos generales de estrellas (que incluyen estrellas y material absorbente sin restricción a distancias) la transparencia relativa en una dirección con respecto a otra puede causar que la fracción equivalente al número de estrellas débiles sobre el número de estrellas brillantes sea más grande en la dirección sin absorción que en la dirección con absorción.

Cuando las estrellas contadas ocupan dos distintas regiones limitadas del espacio siendo una de ellas relativamente más transparente que la otra, la comparación respectiva del número de estrellas contadas en diferentes intervalos de luminosidad tal vez no pueda explicar las grandes diferencias atribuídas al envolvente.

Un caso concreto se puede presentar en relación con los diferentes grupos de estrellas T-Tauri, las cuales obviamente están asociadas con ciertas nubes interestelares y por lo tanto ocupan, probablemente, un volumen limitado del espacio. Podemos juzgar, sin tener necesidad de cálculos, que las estrellas de mayor brillo observadas, serán menor en número en el grupo de absorción relativa, que en la región clara.

Sin embargo, al extender las observaciones hasta incluir las estrellas menos brillantes, el aumento del número de las estrellas débiles, en unidades del número de las estrellas brillantes correspondiente a cada grupo, será *más grande* para el grupo *con absorción* que para el grupo sin absorción; un hecho que no puede esperarse a primera vista.

Por esta razón he considerado de cierto interés determinar cuantitativamente el efecto que debe esperarse debido a una diferencia en las características de la transparencia entre dos regiones, a través de toda la gama de las luminosidades absolutas contenidas en los grupos. En el presente trabajo se considera el caso idealizado de dos regiones ocupadas por estrellas, siendo estas regiones semejantes en todas sus características exceptuando la cantidad de absorción que causan sobre la luz que les atraviesa.

Las suposiciones listadas abajo, para simplificar el problema, están hechas de tal manera que el parámetro que afecta el porcentaje de las estrellas observadas, dentro de los diferentes intervalos de luminosidades, sea *únicamente* la diferencia en la absorción en las dos regiones.

Suposiciones.—Sean G_1 y G_2 las dos regiones conteniendo N_1 y N_2 estrellas respectivamente, siendo G_2 más oscurecida que G_1 con una diferencia de *a* magnitudes en total.

1. Supondremos que la distribución de las magnitudes absolutas de las estrellas en los grupos G_1 y G_2 es idéntica y Gaussiana (véase también apéndice c) caracterizada por la función

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{M^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

en donde σ es la dispersión de las magnitudes absolutas M. Se ve claramente que el eje de simetría de la curva Gaussiana se ha hecho coincidir con el eje $M = O$, obviamente sin pérdida de generalidad.

---

* Becaria del Instituto Nacional de la Investigación Científica.

El valor de σ está determinado (en unidades de magnitud) suponiendo que para una M límite escogida el número de las estrellas entre $-M$ y $+M$, obtenidos con la integración de la función Gaussiana, sea el 99.52 % del total. En estos puntos, $-M$ y $+M$ (los llamaremos límites significativos de las magnitudes absolutas), M satisface a la relación

$$M = 2\sqrt{2}\,\sigma \tag{2}$$

2. Se supone que N_1 y N_2 son sólo finitos y no necesariamente iguales.

3. Se supone que la distribución del material interestelar —que causa la absorción— es uniforme; como consecuencia de esta característica la absorción observada en unidades de magnitud, será proporcional a la distancia recorrida por la luz a través de la nube.

4. La distribución espacial de las estrellas se supone uniforme en G_1 y G_2 siendo cada grupo de espesor constante en la línea visual (véase apéndice a).

5. Se supone que G_1 y G_2 se encuentran a distancias del observador comparables entre sí aunque no necesariamente iguales, pero que la absorción enfrente de G_1 y G_2 es igual.

Consideraciones Teóricas.—Ahora podremos calcular el porcentaje (o fracción) de las estrellas observadas sobre el total en un grupo, entre cualquier intervalo de magnitudes, efectuando la integración de la función Gaussiana. El número de las estrellas observadas en G_1, en unidades del número total, y entre los límites de magnitudes M_1 y M_2 (correspondientes a las magnitudes aparentes m_1 y m_2) está dado por la integral:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{M_1}^{M_2} e^{-\frac{M^2}{2\sigma^2}}\, dM \tag{3}$$

En el caso de la región G_2, la cual produce un oscurecimiento de a magnitudes en su espesor total, las magnitudes aparentes serán aumentadas por una cantidad que variará desde cero, para las estrellas en el lado más cercano de la región, hasta a magnitudes, en el límite más lejano del grupo. Por lo tanto los límites de la integración, M_1 y M_2, ya no serán constantes sino que variarán de M_1 hasta $M_1 - a$, y de M_2 hasta $M_2 - a$ respectivamente. La fracción de las estrellas observadas en G_2 en el intervalo (M_1, M_2) —correspondiente al intervalo (m_1, m_2) de las magnitudes aparentes— será dada por la siguiente expresión:

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{o}^{a} da \int_{M_1 - a}^{M_2 - a} e^{-\frac{M^2}{2\sigma^2}}\, dM \tag{4}$$

Esta expresión es el valor medio de la integral de la derecha en el intervalo de cero a a de la absorción.

Las cuadraturas (3) y (4) no pueden efectuarse analíticamente como es bien sabido. Se necesita encontrar los resultados con integraciones númericas. He aprovechado las tablas ya calculadas y publicadas[3] que dan el doble del valor de la integral de 0 a x en donde $x = \frac{M}{\sqrt{2}\,\sigma}$. La integración desde cero a a la he efectuado numéricamente usando 11 pasos.

Los cálculos se han hecho para varias combinaciones de los valores de σ y de a, y para diversos valores del intervalo de magnitudes. Los resultados aparecen en las tablas I, II, III, IV, V y VI.

En todas estas tablas las columnas marcadas con 2, 4, 6,. . . , o sea con números pares, dan la fracción (del total) equivalente al número de las estrellas observadas en un grupo entre dos magnitudes límites dadas, (estas magnitudes son tales que siempre $m - M =$ constante) siendo este límite constante para una misma tabla. Las columnas 3, 5, 7, . . . , dan la razón de las cifras de una columna "par" con las cifras de la columna "par" precedente. En otras palabras, las columnas "nones" dan la razón del número de estrellas en el intervalo de magnitudes más débiles al número de estrellas observadas en el intervalo de magnitudes más brillantes inmediatamente precedente o sea el incremento de estrellas cuando se extienden las observaciones a límites más débiles.

TABLA I

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{(M significativo: } -2 \text{ a } +2)$$

Intervalo de magnitud: 1 mag.
Absorción: 1 mag.; 2 mag.

1 Región	*2* M de $-\infty$ a -1.0	*3* Razón: columna 4 a columna 2	*4* M de -1.0 a 0.0	*5* Razón: columna 6 a columna 4	*6* M de 0.0 a $+1.0$	*7* Razón: columna 8 a columna 6	*8* M de $+1.0$ a $+\infty$
G_1 (sin abs.)	0.079	5.3	0.421	1.0	0.421	0.2	0.079
G_2 (abs. 1 mag.)	0.025	9.1	0.228	2.1	0.483	0.5	0.264
G_2 (abs. 2 mag.)	0.014	9.6	0.135	2.6	0.351	1.4	0.500
G_2 (abs. 1 mag. en frente)	0.002	38.0	0.076	5.5	0.421	1.2	0.500

TABLA II

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{(M significativo: } -2 \text{ a } +2)$$

Intervalo de magnitud: 1 mag.
Absorción: 2 mag.

1 Región	*2* M de $-\infty$ a -1.5	*3* Razón: columna 4 a columna 2	*4* M de -1.5 a -0.5	*5* Razón: columna 6 a columna 4	*6* M de -0.5 a $+0.5$	*7* Razón: columna 8 a columna 6	*8* M de $+0.5$ a $+1.5$	*9* Razón: columna 10 a columna 8	*10* M de $+1.5$ a $+\infty$
G_1 (sin abs.)	0.017	13	0.223	2.3	0.520	0.4	0.223	0.1	0.017
G_2 (abs. 2 mag.)	0.002	33	0.068	4.6	0.316	1.4	0.433	0.4	0.181

TABLA III

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{(M significativo: } -2 \text{ a } +2)$$

Intervalo de magnitud: 1.5 mg.
Absorción: 0.5 mag.; 1.0 mag.

1 Región	*2* M de $-\infty$ a -1.5	*3* Razón: columna 4 a columna 2	*4* M de -1.5 a 0.0	*5* Razón: columna 6 a columna 4	*6* M de 0.0 a $+1.5$	*7* Razón: columna 8 a columna 6	*8* M de $+1.5$ a $+\infty$
G_1 (sin abs.)	0.017	28	0.483	1.0	0.483	0.04	0.017
G_2 (abs. 0.5 mag.)	0.008	44	0.357	1.7	0.593	0.07	0.042
G_2 (abs. 1.0 mag.)	0.005	49	0.247	2.6	0.641	0.15	0.100

TABLA IV

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \text{(M significativo: } -4 \text{ a } +4\text{)}$$

Intervalo de magnitud: 3 mag.
Absorción: 1 mag.; 2 mag.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Región	*M de* $-\infty$ *a* -3.0	*Razón: columna 4 a columna 2*	*M de* -3.0 *a 0.0*	*Razón: columna 6 a columna 4*	*M de 0.0 a* $+3.0$	*Razón: columna 8 a columna 6*	*M de* $+3.0$ *a* $+\infty$
G_1 (sin abs.)	0.017	28	0.483	1.0	0.483	0.04	0.017
G_2 (abs. 1 mag.)	0.008	44	0.357	1.7	0.593	0.07	0.042
G_2 (abs. 2 mag.)	0.005	49	0.247	2.6	0.641	0.15	0.100

TABLA V

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \text{(M significativo: } -4 \text{ a } +4\text{)}$$

Intervalo de magnitud: 3 mag.
Absorción: 1 mag.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Región	*M de* $-\infty$ *a* -1.0	*Razón: columna 4 a columna 2*	*M de* -1.0 *a* $+2.0$	*Razón: columna 6 a columna 4*	*M de* $+2.0$ *a* $+\infty$
G_1 (sin abs.)	0.240	2.8	0.681	0.1	0.078
G_2 (abs. 1 mag.)	0.150	4.7	0.699	0.2	0.150

TABLA VI

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \text{(M significativo: } -4 \text{ a } +4\text{)}$$

Intervalo de magnitud: 1 mag.
Absorción: 1 mag.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Región	*M de* $-\infty$ *a* -3	*Razón: columna 4 a columna 2*	*M de* -3 *a* -2	*Razón: columna 6 a columna 4*	*M de* -2 *a* -1	*Razón: columna 8 a columna 6*	*M de* -1 *a 0*	*Razón: columna 10 a columna 8*
G (sin abs.)	0.017	3.6	0.062	2.6	0.161	1.6	0.260	1.0
G (abs. 1 mag.)	0.007	4.8	0.034	2.9	0.099	2.2	0.215	1.2

TABLA VI (Continúa)

	10	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
Región	*M de 0 a* $+1$	*Razón: columna 12 a columna 10*	*M de* $+1$ *a* $+2$	*Razón: columna 14 a columna 12*	*M de* $+2$ *a* $+3$	*Razón: columna 16 a columna 14*	*M de* $+3$ *a* $+\infty$
G (sin abs.)	0.260	0.6	0.161	0.4	0.062	0.3	0.017
G (abs. 1 mag.)	0.270	0.8	0.215	0.5	0.099	0.4	0.041

Se puede comprobar fácilmente que los resultados de los cálculos incluídos en las tablas permanecerán invariantes cuando los parámetros —siendo éstos a (la absorción), σ (la dispersión) y el intervalo de las observaciones en magnitudes— sean multiplicados por la misma cantidad positiva. En efecto, se nota que los datos en las columnas respectivas de las tablas III y IV son idénticos, pues los parámetros correspondientes a la tabla IV son los dobles de los de la tabla III.

Discusión de las Tablas.

1. Se nota, en primer lugar que en todas las tablas la fracción de las estrellas observadas en la región G_1 (sin absorción), dentro de los límites de las magnitudes brillantes, es más grande que las correspondientes fracciones de la región G_2 (véanse las columnas pares) hasta que las observaciones llegan a la magnitud para la cual la función de distribución es máxima. De ahí en adelante la progresión es reversa: el número de las estrellas observadas en unidades del total es menor para la región clara, G_1, que para la región G_2.

2. Se nota, en segundo lugar, que la razón de los números en un intervalo de magnitud dado, a los números en el intervalo más brillante es $>>$ 1 en un principio (véanse columnas 2, 4, 6, . . .), tanto en G_1 como en G_2 y decrece llegando a valores $<$ 1 para intervalos débiles. El punto que queremos hacer resaltar en este trabajo es el siguiente: que la razón entre el número de estrellas débiles observadas al número de estrellas más brillantes es siempre mayor en G_2 que en G_1 para todas las luminosidades contenidas en los grupos. Esto indica que el número de las estrellas observadas en la región clara no aumenta con la misma rapidez que en la región sujeta a absorción. Podemos decir, en general que, desde que empiezan a observarse estrellas pertenecientes a los dos grupos, la región oscura mostrará, con la variación de la magnitud límite, un incremento en el número de sus estrellas débiles más grande que el incremento correspondiente a la región clara.

Las conclusiones anteriores están basadas en una variedad suficientemente representativa de los valores de la absorción, de la dispersión y de los intervalos de las magnitudes. Se puede concluir, comparando los respectivos incrementos en el número de estrellas en dos regiones, una de ellas oscurecida (G_2) y otra clara (G_1), que el fenómeno de absorción dentro del grupo correspondiente a G_2 no puede explicar el rápido incremento en el número de estrellas que se esperaba en la región clara correspondiente a G_1, pues según nuestros cálculos la absorción produciría exactamente el efecto opuesto.

Hasta aquí he considerado el caso del material absorbente envuelto en el grupo G_2. Cuando este material se localiza en frente del grupo, el efecto encontrado, como consecuencia de nuestros cálculos, será aún más pronunciado. El procedimiento en este caso será mucho más sencillo; sólo se necesitará usar la fórmula (3) pues las tablas correspondientes se encontrarán desplazando la curva Gaussiana a magnitudes hacia las magnitudes brillantes. (Este desplazamiento es de un orden de magnitud doble del desplazamiento necesario para calcular los valores dados en las tablas anteriores).

La rapidez del aumento en el número de las estrellas en este último caso será en el mismo sentido que para el caso del material envuelto en el grupo. En la tabla I se dan, en la última línea, valores correspondientes cuando G_2 tiene enfrente una nube con absorción total de 1 magnitud.

3. Comparando entre sí las tablas anteriores podemos obtener una idea de la variación de los valores dados con la variación de los parámetros. Por ejemplo, de la tabla I se ve que aumentando a, la absorción total, las razones dadas en las columnas "nones" aumentan aún más para el grupo G_2. Una comparación de las tablas V y VI muestra el efecto que tienen los intervalos de magnitudes sobre las razones y una comparación de las tablas II y I (con absorción de 2 magnitudes) muestra el efecto de la dispersión sobre estas mismas razones.

Una Aplicación.—A. H. Joy[4] y más tarde G. Haro[1] y sus colaboradores han descubierto un número considerable de estrellas con características T-Tauri en tres regiones situadas en las nubes oscuras de Taurus-Auriga-Orión. Llamaremos a estas regiones MHα265, MHα257 y MHα259 respectivamente, conservando así la designación empleada por los investigadores antes mencionados.

Las regiones MHα257 y MHα259 son semejantes en muchas de sus características, pero hay una diferencia marcada entre MHα265 y las dos regiones MHα257 y MHα259. Por lo tanto tomaremos sólo las regiones MHα257 y MHα265 como muestras de dos regiones no similares, de las cuales la segunda se cree más transparente que la primera.

Despreciaremos el efecto que producen las diferentes distancias de las estrellas dentro de un mismo grupo sobre las magnitudes aparentes y por lo tanto sobre el número de estrellas observadas. Las áreas proyectadas (3 y 6 grados cuadrados respectivamente) son pequeñas; y si el espesor de la nube es comparable a la extensión proyectada, el efecto debido a la distancia dentro del grupo sería de un orden de magnitud muy inferior si se compara con el efecto producido por la alta absorción supuesta en nuestros cálculos.

En la tabla VII se resumen algunos de los datos conocidos[1] sobre las regiones MHα 257 y MHα 265, datos que son importantes para nuestra discusión.

TABLA VII

Región de Joy	*Area aprox. en grados cuadrados*	*Nº estrellas de Joy*	*Nº estrellas de Tonantzintla*	*% de nuevas estr.*	*Absorción sospechada*
MHα 257	6	5	4	80	con absorción
MHα 265	3	9	29	322	relativamente transparente

Podemos, ahora, comparar los valores dados en las columnas 5 y 6 de la tabla VII con los valores calculados correspondientes que aparecen en las columnas "pares" en las tablas I, II, III, IV, V y VI. En ninguna de estas tablas se puede encontrar un caso que satisfaga a los resultados dados en las columnas 5 y 6 de la tabla VII. En todos los casos calculados, la razón de las estrellas en dos intervalos sucesivos de magnitudes es más grande para la región oscurecida en comparación con la región relativamente clara; por otro lado el examen de la tabla VII muestra el efecto contrario. Así, pues, podemos estar seguros de que el aumento rápido del número de las estrellas T-Tauri en MHα265 en comparación con MHα257 no se debe a la absorción. Este aumento rápido se debe a otra causa. Hay que señalar una vez más, que nuestros resultados calculados son ciertos sean N_1 y N_2 iguales o no.

APENDICE

a) Se ha supuesto que la nube tiene igual espesor en todas las direcciones y que la densidad estelar es uniforme. Sin embargo es mucho más probable que un grupo de estrellas físicamente relacionadas, ocupando un recinto en el espacio, posea condensación y tal vez una especie de simetría esférica en el caso ideal. El estudio del efecto del material absorbente —a su vez con concentración central— sobre el número observado de las estrellas es un tanto más complicado, debido en parte a la imposibilidad de efectuar las integraciones analíticamente. Lo anterior será objeto de una futura investigación. Por el momento, las suposiciones sencillas hechas en este trabajo, pueden darnos en forma satisfactoria, el orden de magnitud del efecto tratado.

b) El estudio del efecto de la absorción en un volumen limitado sobre el número observado de las estrellas dentro de éste y entre diferentes límites de magnitud puede efectuarse también del modo siguiente: Se determina, desde un principio, una nueva "aparente" curva de distribución de luminosidades basándose en la distribución "intrínseca" de luminosidades y en la constante de la absorción dentro del grupo. Realizado lo anterior, el cálculo del número de las estrellas en intervalos de magnitudes es un procedimiento sumamente sencillo, siendo idéntico al caso sin absorción siempre y que se sustituya la función de distribución por la función "aparente" derivada.

La distribución "aparente" $\Psi(M)$ puede deducirse de la función "intrínseca" $\varphi(M)$ usando la relación siguiente:

$$\Psi(M) = \frac{1}{a} \int_{M-a}^{M} \varphi(M) dM$$

lo cual es el valor medio de la función φ al variar M de M a M$-a$. Cuando

$$\varphi(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{M^2}{2\sigma^2}}$$

la correspondiente Ψ no puede obtenerse analíticamente. Ψ ya no será Gaussiana aunque no está muy lejos de ésta. La nueva función, en términos de la Gaussiana, será más aplastada y más extendida a medida que aumenta el parámetro a.

c) En el presente trabajo, como se ha dicho oportunamente, hemos supuesto que la región G_1 es transparente en relación con G_2. En el caso general las dos regiones contienen material absorbente pero con una diferencia considerable en la opacidad total; a esta diferencia la hemos designado con a. La función de distribución "intrínseca" estará, entonces, afectada tanto en G_1 como en G_2. Para evitar complicaciones introducidas por esta circunstancia es la función "aparente" de la distribución en G_1 que se supone Gaussiana (véase suposición 1).

REFERENCIAS

1. G. Haro, B. Iriarte, E. Chavira. Boletín Obs. Tonantzintla y Tacubaya, Nº 8, 1953.
2. W. Baade, R. Minkowski. Ap. J. Vol. 86, p. 121, 1937.
3. B. O. Peirce. A Short Table of Integrals. Ginn and Co., 3ª edición.
4. A. H. Joy. Ap. J. Vol. 110, p. 424, 1949.

THE EFFECT OF ABSORBING MATTER ON THE OBSERVED NUMBER OF THE EMBEDDED STARS. I:

In recent astronomical literature[1,2] I have come across statements emphasizing the possibility that the observed faster increase of star density in one region relative to another, upon extending observations to fainter magnitudes, may be due to the relative transparency of the former region in comparison to the latter. In the case of general star counts, (which include stars and absorbing matter at all distances) relative transparency —or absorption— in a direction compared to another unquestionably causes the percentage of new stars over the observed brighter ones to be less in the obscured region than in the unobscured one.

But if starcounts are performed on two groups of stars, each occupying a limited volume of space, and if one of these is relatively clear of absorbing matter (within the volume occupied by the group) the intercomparison of the observed percentage of star numbers within different magnitude intervals may not explain the large differences attributed to the enveloping matter. One such case presents itself in connection with the different groups of T-Tauri stars, which are obviously associated with interstellar clouds and hence most probably occupy a limited volume of space.

It can be easily seen, without the need of computation, that the brightest observable stars in the obscured region indeed will be fewer than in the clear region. Yet upon extending the observations to fainter stars the number of new stars as a fraction of the number of the brighter stars will be *much larger* for the *obscured region* than for the non-obscured one, contrary to what one would expect offhand.

I have therefore considered it worthwhile to make quantitative estimates of the effect to be expected from a difference only in the transparency, throughout the total range of the luminosities in the groups, based on very broad assumptions. In the present investigation we take up the idealized case of two regions occupied by stars, which are similar in every respect except in the amount of obscuration they cause upon starlight traveling through them.

Simplifying assumptions, listed below, are made in such fashion as to insure that the *only* parameter affecting the percentage of stars observed, within given luminosity limits, shall be the difference in the absorption of one region with regard to the other .

Assumptions.—Let G_1 and G_2 represent the two groups where G_2 is obscured relative to G_1 by a magnitudes.

1. We assume that the distribution of the absolute luminosities of the stars in the groups G_1 and G_2 is identical and Gaussian, characterized by the function (1) given on page 3 where σ is the dispersion (or standard desviation) of the absolute luminosity M. It is clear that the axis of symmetry of the Gaussian curve is made to coincide with $M = O$; obviously no loss of generality results from such choice.

The value of σ (in magnitude units) is determined by assuming that for a chosen limiting M the number of stars between $-M$ and $+M$, given by the integration of the Gaussian function, will be 99.52 % of the total. The relation between M, (the significant limit of the absolute magnitudes) and σ is given in (2) on page 4.

2. We assume, next, that the number N_1 and N_2 of the stars in each group is finite and not necessarily equal.
3. We assume that the distribution of interstellar matter which causes the obscuration is uniform; as a result the absorption in magnitude units will be proportional to the distance traveled in the cloud.
4. The space distribution of the stars is uniform throughout G_1 and G_2, each group being of constant depth in the line of sight (see appendix a).
5. G_1 and G_2 are at comparable distances from the observer and the amount of absorption in the foreground is identical.

Theoretical Considerations

We can now compute the percentage (or fraction) of stars, over the total, observed in each group for varying magnitude intervals, through the integration of the Gaussian function. The fraction of the stars observed in G_1 between magnitudes M_1 and M_2 (corresponding to apparent magnitudes m_1 and m_2) is given by the integral (3), given on page 4 In the case of region G_2, which produces obscuration of a magnitudes at its total depth, the apparent magnitudes will be dimmed by an amount varying from 0, for the stars in the foreground of the group, to a, for stars at the farthest limit of the group. Hence M_1 and M_2, the integration limits, will no more be constant but will vary from M_1 to $(M_1 - a)$ and from M_2 to $(M_2 - a)$ respectively. Therefore the fraction of the stars observed in G_2 between the apparent magnitude limits corresponding to M_1 and M_2 will be given by the expression (4) given on page 4 which is the mean value of the integral on the right hand side when a varies from o to a.

Integrations (3) and (4) cannot be performed analytically, as it is well known. Recourse must be had to numerical methods. Use has been made in our computations of published tables[3] which give twice the value of the integral from 0 to x, where $x = \dfrac{M}{\sqrt{2}\,\sigma}$. The integrations over a are performed in 11 steps.

Computations are made for various combinations of the values of a, σ, and of the magnitude intervals (M_1, M_2). The results are given in tables I to VI. In all these tables columns 2, 4, 6, . . . , give the fraction of the observed stars in a group within a given magnitude interval (which is constant for the same table) over the total number of stars in the group; while columns, 3, 5, 7, ..., give the ratio of the numbers in an even column to that in the preceding even column. The columns designated by odd numbers give, thus, the ratio of the number of stars in a fainter interval of magnitude to those in the preceding brighter magnitude interval, hence the ratio of the increase of stars as we extend the observations to fainter magnitudes.

It can be easily verified that any of the entries in the tables will remain invariant when the parameters —which are: a (the absorption), σ (the dispersion) and interval of magnitude— are all multiplied by the same positive number. In fact it will be noticed that the entries in the respective columns in tables III and IV are identical, as the parameters corresponding to table IV are twice those of table III.

Discussion of the tables.

1. We note, in the first place, that in all the tables the fraction of the total number of stars observed in region G_1 (no absorption) within brighter magnitude intervals is larger than the corresponding fraction in region G_2 (see odd columns) until the observations reach the magnitude for which the Gaussian distribution function is a maximum. From there on the run is reversed; in fact the number of stars observed, given as fractions of the total, within fainter magnitude intervals, are smaller for G_1 than for G_2.

2. We note, in the second place, that the ratio of the numbers in one magnitude interval to the corresponding number in the preceeding brighter magnitude interval (see even columns) starts with a high value, $\gg 1$, and continues decreasing for both G_1 and G_2, the ratio becoming < 1 for faintest magnitude intervals. The main point stressed in the present work is that this ratio is always larger for G_2 than for G_1 throughout all the magnitudes covered by the stars in the groups. Thus the number of new stars observed in the clear region, as we extend observations to fainter magnitudes does not increase as fast in the clear region as it does in the obscured one. We can say in general that, once the stars belonging to the groups start to be observed, the obscured region will exhibit a faster ratio of increase with the advancing faintness of the limiting magnitude. Our assumptions cover a wide variety of values of the absorption, the dispersion of the absolute magnitudes for the observations, etc. Hence transparency, we conclude, cannot be held responsible for the faster increase of star numbers, as the excepted theoretical effect is just the opposite of it. The cause of a faster increase must be searched for elsewhere and not in an absorption effect.

Till now we considered the case of a group which is involved in absorbing matter. When the absorbing cloud is in front of the group the effect we have discussed will be much more pronounced. However computations will be fairly simple; we only need to consider formula (1), as the new tables will be obtained by shifting the assumed Gaussian curve towards brighter M's by an amount equal to the total absorption, in magnitudes, of the cloud.

The ratio of increase in the numbers as we go to fainter magnitudes will be in the same sense as for the group involved in the absorbing matter, discussed earlier. In table I we have included one such case namely when there is a screen with total absorption of 1 magnitude in front of the group.

3. Intercomparing the tables we can have an idea of the variation of the entries due to the variation of the parameters. For instance we see that (cf. table I) when a, the total absorption, increases the ratios given in the odd columns become still larger in the absorbed group versus the clear group. A comparison of tables V and VI shows what the effect of larger intervals of magnitude covered by the observations would be upon the ratios we are discussing. While a comparison of tables II and I (with absorption of 2 magnitudes) shows the effect of the dispersion of the absolute magnitudes on the ratios.

An Application.—A. H. Joy and subsequently G. Haro and collaborators have discovered a considerable number of stars showing T-Tauri characteristics in three regions located in the dark clouds of Taurus-Auriga-Orion. We shall refer to these regions as MHα265, MHα257 and MHα259 respectively, to use the designation appearing in earlier investigations.

Whereas regions MHα257 and MHα259 are similar in many characteristics discussed by earlier workers, there is a marked difference between MHα265 and the two regions cited above. I shall therefore confine myself to the consideration of regions MHα257 and MHα265 as samples for the two dissimilar regions of which the second is suspected to be relatively more transparent.

We neglect, in the present investigation, the effect of depth in the cloud on the observed magnitudes of the stars and hence on the observed number of stars. The projected areas of the regions are not large (3 and 6 square degrees respectively); and if we assume the depth to be comparable to the apparent extension, the effect of depth on the observed magnitudes may be negligible compared to the effect produced by the high absorption constants assumed in our computations.

Table VII summarizes some of the known data on these two regions, relevant to the present discussion and which are reproduced from the paper, already cited, of the Tonantzintla astronomers.

We can now compare the pairs of entries in columns 5 and 6 of table VII with the corresponding computed values (even columns) of the tables I to VI. In none of the tables can we find entries satisfying any of the data of the columns 5 and 6 of table VII. As it can be seen from the computed values, the ratio of the number of stars in two successive magnitude intervals is larger for the obscured region compared to the relatively transparent region, whereas table VII giving the observational results, shows the opposite to be true. We can thus be definitely sure that the fast increase of T-Tauri stars in region MHα265 compared to MHα257 cannot be explained as an absorption effect; it must be due to some other cause. We may emphasize, again, that these results are true whether the total number of stars N_1 and N_2 be equal of not.

APPENDIX

a. The cloud is assumed to be of equal depth throughout and of constant star density. It is more likely, however, that a group of stars physically related, occupying a limited volume of space, shows condensations and probably also some sort of spherical symmetry, in the ideal case. The effect of absorption by matter, itself possessing condensation, upon the number of observed stars is somewhat more complicated due partly to the impossibility of analytical quadrature of the distribution function. This will be the subject of a later publication. However, it seems that, for the present the simpler assumptions made can give us satisfactorily the order of magnitude of the effect we are looking for.

b. The study of the effect of absorption in a volume of space on the number of stars observed in different magnitude intervals can also be performed by deriving at the start an "apparent" distribution function from the "intrinsic" distribution function of the group and the absorption constant; the calculation of the star numbers within given magnitude intervals is, then, a simple matter. It is identical to the computation for the group without absorption (formula 2), where the Gaussian function is substituted by the new "apparent" distribution.

c. As it has been emphasized earlier, we have assumed that region G_1 is clear while G_2 is involved in absorbing matter. In the general case, however, the two regions contain absorbing matter but with a difference in total opacity amounting to a magnitudes. In the latter case the "intrinsic" distribution function will be affected not only in G_2 but also in G_1. To avoid complications introduced by this circumstance it is the "apparent" distribution function of G_1 that we assume Gaussian in our assumption 1.