

LA ENERGÍA POTENCIAL DE LA ESFERA POLITROPICA $n = 5$

*Arcadio Poveda**

Al desarrollar el trabajo anterior,¹ hubo necesidad de calcular, en general, la energía potencial de una galaxia esférica y para esto, suponer alguna distribución de densidad. Como por un lado es sabido² que el brillo superficial (o la densidad estelar superficial) de los cúmulos globulares es bastante similar a la proyección del politropo $n = 5$, y como por otra parte la densidad en éste es expresable en forma analítica, resultaba entonces muy tentador suponer que la energía potencial de este politropo era aplicable también a las galaxias esféricas. Sin embargo, ante la duda, preferimos proceder para las galaxias como se indicó en el trabajo anterior y calcular de todas maneras la energía potencial de $n = 5$ para ver cuán sensible sería la estimación de la masa a la hipótesis que se hiciera sobre la distribución de densidad.

La energía potencial de un politropo de índice n ha sido calculada por Betti y Ritter, y su expresión es la que se da en los tratados modernos^{3,4} sobre esferas gaseosas. Esta expresión:

$$\Omega = - \frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} \quad (1)$$

tiene el inconveniente de que para $n = 5$ está indeterminada, ya que para este valor de n el radio es infinito. El uso de esta fórmula se presta a confusiones, y así Chandrasekhar⁵ afirma que la energía potencial de la configuración que nos ocupa es "infinita". Por otra parte, Spitzer⁶ al estudiar la dinámica del medio interestelar en las galaxias esféricas, comenta que puede demostrarse que en realidad la energía potencial es finita. Sin embargo, Spitzer no da el valor de dicha energía.

En vista de lo anterior, hemos decidido calcular la energía potencial a partir de la definición y reexpresarla en función de los parámetros más convenientes desde el punto de vista de su aplicación a los cúmulos de estrellas.

De la definición de energía potencial de una configuración con simetría esférica, se sigue que:

$$-\Omega = G \int_0^\infty \frac{M(r)dM}{r} \quad (2)$$

donde $M(r)$ es la masa interior a una esfera de radio r y concéntrica con la configuración.

Por otro lado:⁷

$$M(r) = - 4\pi \alpha^3 \lambda \xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi} \quad r = \alpha \xi \quad (3)$$

de donde se sigue que:

$$dM(r) = - 4\pi \alpha^3 \lambda d\left(\xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi}\right)$$

por lo tanto:

$$\frac{M(r)dM}{r} = 16 \pi^2 \alpha^5 \lambda^2 \xi \frac{d\vartheta}{d\xi} d\left(\xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi}\right)$$

Así que:

$$\Omega = - 16 \pi^2 \alpha^5 \lambda^2 G \int_0^\infty \xi \frac{d\vartheta}{d\xi} d\left(\xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi}\right) \quad (4)$$

* Becario del Instituto Nacional de la Investigación Científica.

Integrando por partes:

$$\Omega = -16 \pi^2 \alpha^3 \lambda^2 G \left\{ \xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi} \right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi} d \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right) \right\}$$

Se puede demostrar a partir de $\vartheta_3(\xi)^8$ y su derivada que:

$$\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi} \right) \Big|_0^\infty = 0 \quad \text{y por lo tanto}$$

$$\begin{aligned} \Omega &= -16 \pi^2 \alpha^3 \lambda^2 G \left\{ - \int_0^\infty \xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi} \left[\frac{d\vartheta}{d\xi} + \xi \frac{d^2\vartheta}{d\xi^2} \right] d\xi \right\} \\ &= 16 \pi^2 \alpha^3 \lambda^2 G \left\{ \int_0^\infty \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right)^2 d\xi + \int_0^\infty \xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi} \frac{d^2\vartheta}{d\xi^2} d\xi \right\} \\ &= 16 \pi^2 \alpha^3 \lambda^2 G \left\{ \int_0^\infty \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right)^2 d\xi + \int_0^\infty \frac{1}{2} \xi^2 d \left(\frac{d\vartheta}{d\xi} \right)^2 \right\} \\ &= 16 \pi^2 \alpha^3 \lambda^2 G \left\{ \int_0^\infty \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right)^2 d\xi + \frac{1}{2} \xi^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\xi} \right)^2 \Big|_0^\infty - \frac{3}{2} \int_0^\infty \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right)^2 d\xi \right\} \end{aligned}$$

entonces

$$\Omega = -8 \pi^2 \alpha^3 \lambda^2 G \int_0^\infty \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right)^2 d\xi \quad (5)$$

como⁸ $\vartheta_3(\xi) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3} \xi^2\right)^{1/2}}$; entonces $\left(\frac{d\vartheta}{d\xi}\right)^2 = \frac{1}{9} \frac{\xi^2}{\left(1 + \frac{1}{3} \xi^2\right)^3}$ y por lo tanto:

$$\int_0^\infty \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right)^2 d\xi = \frac{1}{9} \int_0^\infty \frac{\xi^4}{\left(1 + \frac{1}{3} \xi^2\right)^3} d\xi \quad ; \quad \text{haciendo} \quad \frac{1}{3} \xi^2 = u^2$$

resulta:

$$\int_0^\infty \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right)^2 d\xi = \sqrt{3} \int_0^\infty \frac{u^4 du}{(1+u^2)^3}$$

Además es posible demostrar que:

$$\int \frac{u^4 du}{(1+u^2)^3} = \frac{3}{8} \operatorname{ang} \tan u + \frac{u}{4(1+u^2)^2} - \frac{5u}{8(1+u^2)}$$

y sustituyendo en (5)

$$\Omega = - \frac{3\sqrt{3}}{2} \pi^3 \alpha^5 \lambda^2 G \quad (6)$$

De la expresión (3) para $M(r)$ se obtiene que:

$$M = \lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = 4\sqrt{3} \pi \alpha^3 \lambda \quad (7)$$

así que dividiendo (6) entre el cuadrado de (7) resulta:

$$\frac{\Omega}{M^2} = - \frac{\sqrt{3} \pi G}{32\alpha}$$

de donde obtenemos otra expresión para la energía potencial

$$\Omega = - \frac{\sqrt{3} \pi G M^2}{32\alpha} \quad (8)$$

En la teoría clásica de las configuraciones politrópicas, no habría ningún inconveniente en el uso de esta expresión; sin embargo, si quisiéramos aplicarla a cúmulos de estrellas (por ejemplo cúmulos globulares), tendríamos que deducir la distribución de densidad tridimensional para dichos cúmulos, a fin de encontrar el valor correspondiente de α ; aunque esto es posible en principio, en la práctica resulta muy incierto. En efecto, lo que haríamos es determinar a qué distancia r_1 en centímetros, del centro del cúmulo, la densidad ha decaído a la mitad del valor central (por ejemplo); por otro lado de la teoría del politropo $n = 5$,⁴ sabemos que para cierto valor ξ_1 de la variable ξ se tiene que:

$$\frac{\varrho(\xi_1)}{\varrho(0)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3} \xi_1^2\right)^{5/2}} ; \quad \left(1 + \frac{1}{3} \xi_1^2\right)^{5/2} = 2$$

$$1 + \frac{1}{3} \xi_1^2 = \sqrt[5]{4} ; \quad \xi_1^2 = 3(\sqrt[5]{4} - 1)$$

$$r_1 = \alpha \xi_1 \quad \text{entonces} \quad \alpha = \frac{r_1}{\sqrt{3(\sqrt[5]{4} - 1)}}$$

En esta forma determinaríamos α en centímetros, ya que r es conocido en centímetros. Sin embargo, todo el proceso presupone el conocimiento de la densidad central, y este a su vez el de la densidad proyectada en el centro de la imagen; pero desgraciadamente la densidad central espacial es muy sensible a la determinación de la densidad proyectada en la vecindad del centro.

En vista de estas dificultades, creemos puede ser más útil introducir una medida diferente de la escala. La nueva medida a será *similar* a la definida por de Vaucouleurs⁹ para galaxias. Nuestra a la definimos como: la distancia al cúmulo o configuración, expresada en centímetros, por el radio en radianes del círculo concéntrico a la imagen de la configuración, y que contiene la mitad de la masa total (o de la luz).

Para relacionar a con α será preciso "proyectar" sobre un plano la distribución espacial, lo cual a su vez nos permitirá una fácil comparación de los brillos o conteos observables contra la distribución teórica.

Si la densidad en el espacio está dada por⁴:

$$\varrho(r) = \lambda \vartheta_s^5 = \frac{\lambda}{\left(1 + \frac{1}{3} \xi^2\right)^{5/2}} \quad \lambda = \text{densidad central}$$

y como por otro lado¹⁰

$$I(s) = 2 \int_s^\infty \varrho(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - s^2}} \quad (9)$$

donde $I(s)$ es la intensidad proyectada a la distancia s del centro de la imagen; introduciendo $r = \alpha \xi$; $s = \alpha \eta$ nos queda:

$$I(s) = 2 \lambda \int_{\eta}^{\infty} \frac{I}{\left(1 + \frac{1}{3} \xi^2\right)^{3/2}} \frac{\alpha \xi d \xi}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} = 2 \alpha \lambda \int_{\eta}^{\infty} \vartheta_{s^2} \frac{\xi d \xi}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}$$

Sea
$$F = \int_{\eta}^{\infty} \vartheta_{s^2} \frac{\xi d \xi}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} ; \quad \xi^2 - \eta^2 = u^2 ;$$

entonces:
$$F = \int_0^{\infty} \vartheta_{s^2} du = 3^{5/2} \int_0^{\infty} \frac{du}{[u^2 + (\eta^2 + 3)]^{3/2}}$$

llamemos $b = \eta^2 + 3$ y
$$F' = \int_0^{\infty} \frac{du}{(u^2 + b)^{3/2}}$$

para calcular F' , hagamos $u^2 + b = z^2$

entonces
$$F' = \int_{\sqrt{b}}^{\infty} \frac{dz}{z^2 \sqrt{z^2 - b}} ; \quad \text{esta integral está tabulada}^{11} \text{ y nos da:}$$

$$F' = \left[\frac{\sqrt{z^2 - b}}{3b z^3} + \frac{2}{3b} \int \frac{dz}{z^2 \sqrt{z^2 - b}} \right]_{\sqrt{b}}^{\infty}, \quad \text{donde esta última}$$

integral también está tabulada.¹¹

$$F' = \left[\frac{\sqrt{z^2 - b}}{3b z^3} + \frac{2}{3b} \frac{\sqrt{z^2 - b}}{b z} \right]_{\sqrt{b}}^{\infty} = \frac{2}{3b^2}$$

Teníamos que
$$I(s) = 2 \alpha \lambda F = 2 \alpha \lambda 3^{5/2} F' = \frac{12 \sqrt{3} \alpha \lambda}{\left(3 + \frac{s^2}{\alpha^2}\right)^2}$$

así que finalmente la densidad proyectada nos queda:

$$I(s) = \frac{12 \sqrt{3} \alpha^3 \lambda}{(3 \alpha^2 + s^2)^2} \quad (10)$$

Una interesante verificación de este resultado se obtendría encontrando que $\int_0^{\infty} 2 \pi s I(s) ds = M$ ya que esta integral deberá ser precisamente la luminosidad (o masa) total de la configuración dada por la ecuación (7).

En efecto:

$$M(s) = \int_0^{\infty} 2 \pi s I(s) ds = 24 \pi \sqrt{3} \alpha^3 \lambda \int_0^{\infty} \frac{s ds}{(3 \alpha^2 + s^2)^2}$$

Haciendo $3\alpha^2 + s^2 = v$; $2sds = dv$, resulta:

$$M(s) = 12 \sqrt{3} \pi \alpha^3 \lambda \int_{\alpha^2}^{3\alpha^2 + s^2} \frac{dv}{v^2} = 12 \sqrt{3} \pi \alpha^3 \lambda \left[-\frac{1}{3\alpha^2 + s^2} + \frac{1}{3\alpha^2} \right]$$

finalmente

$$M(s) = 4 \sqrt{3} \pi \alpha^3 \lambda \frac{s^2}{3\alpha^2 + s^2} \quad (11)$$

sustituyendo la ecuación (7) en la (11):

$$M(s) = M \frac{s^2}{3\alpha^2 + s^2} \quad (12)$$

de donde se sigue que: $\lim_{s \rightarrow \infty} M(s) = M$.

Ahora deseamos encontrar el valor de $s = a$ como función de α tal que:

$$\frac{M(a)}{M} = \frac{a^2}{3\alpha^2 + a^2} = \frac{1}{2}; \quad a^2 = 3\alpha^2 \quad (13)$$

introduciendo (13) y (7) en las ecuaciones (10), (11) y (8) nos queda:

$$I(s) = \frac{a^2 M}{\pi(a^2 + s^2)^2} \quad (14)$$

$$M(s) = \frac{M s^2}{a^2 + s^2} \quad (15)$$

$$\Omega = -\frac{3 \pi G}{32} \frac{M^2}{a} \quad (16)$$

como ya se indicó la determinación de a requiere, 1º saber la distancia al cúmulo, y 2º —ya sea por conteos o procedimientos fotométricos— determinar en radianes el radio del círculo que contiene la mitad de la luz de la imagen. Esto naturalmente requiere conocer el número total de estrellas o la magnitud total del objeto en cuestión, y aunque nunca nos es posible afirmar que conocemos la magnitud total, las estimaciones más modernas muy probablemente difieren poco del valor real, por lo tanto, la incertidumbre en a producida por la incertidumbre en M debe ser pequeña, en todo caso menor que la que resultaría si usáramos α .

La expresión (16) y el teorema Virial nos permiten deducir una ecuación para determinar la masa de un cúmulo. Si las estrellas se mueven en órbitas radiales, entonces la energía cinética del cúmulo será: $T = 1/2 M \sigma_{obs}^2$ donde hemos supuesto que las estrellas son aproximadamente de la misma masa (ver trabajo anterior), así que:

$$\begin{aligned} M \sigma_{obs}^2 &= \frac{3 \pi G}{32} \frac{M^2}{a} \\ M &= \frac{32}{3 \pi} \frac{a \sigma_{obs}^2}{G} \\ M &= 3.4 \frac{a \sigma_{obs}^2}{G} \end{aligned} \quad (17)$$

Esta expresión para la masa es comparable con la que dedujimos en el trabajo sobre las galaxias esféricas, donde la distribución de densidad es bastante diferente a la del politropo $n = 5$. Con el objeto de fijar ideas y apreciar las diferencias entre el politropo y la distribución actual en las galaxias, hemos comparado en la figura 1 la distribución politrópica proyectada (ecuación 14), con las observaciones de Baum y Van Houten¹² para M 87, la primera ajustada a la luminosidad de M 87. En la figura 2 tenemos las observaciones fotoeléctricas de ω Centauri por Gascoigne y Burr.¹³

Es interesante observar como a pesar de la notable diferencia entre las distribuciones de la figura 1, las fórmulas que nos dan la masa resulten tan semejantes, lo que a su vez implica que la energía potencial es poco sensible a la distribución de densidad *para configuraciones como las consideradas aquí*.

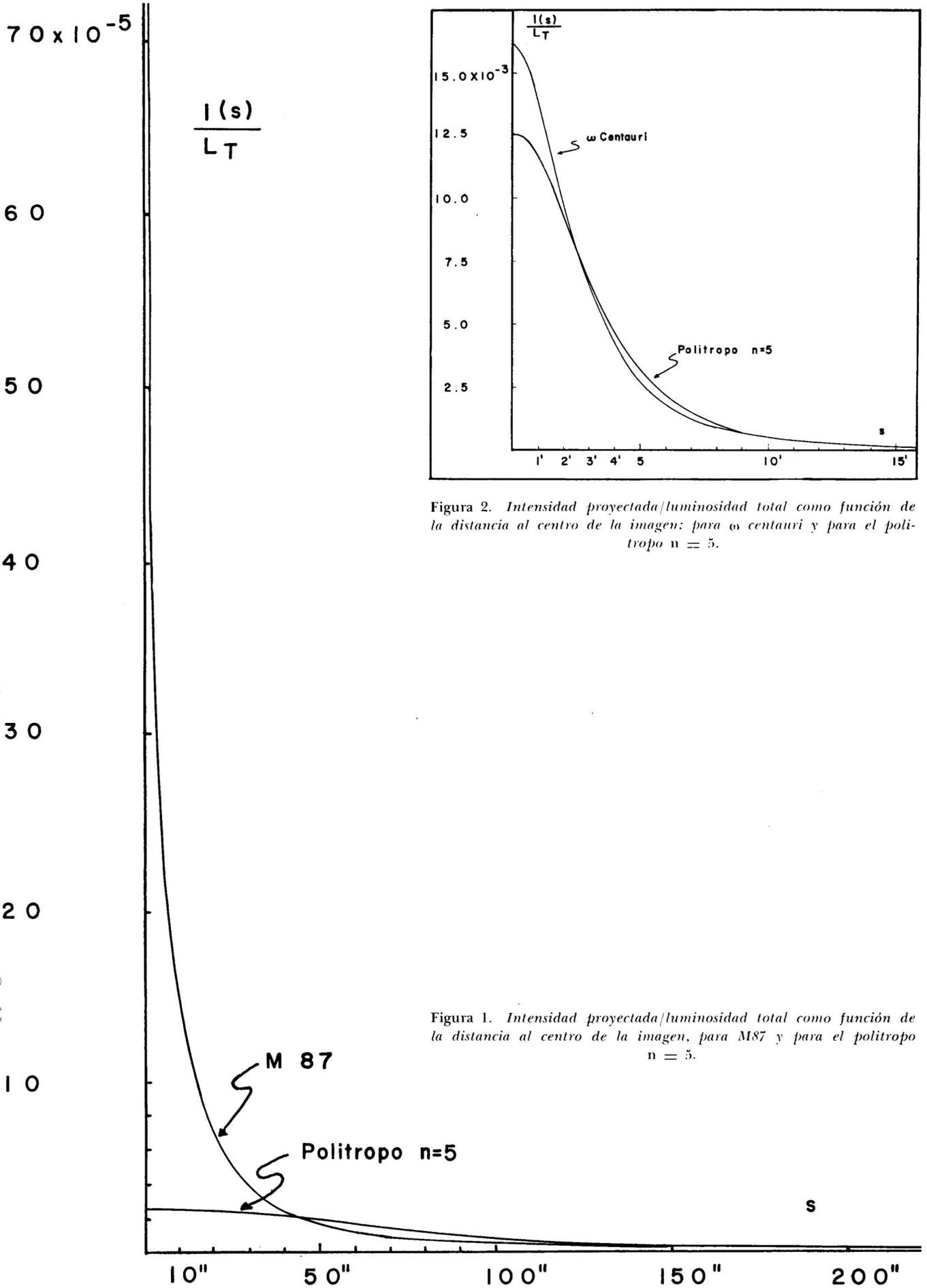


Figura 2. Intensidad proyectada/luminosidad total como función de la distancia al centro de la imagen; para ω Centauri y para el politropo $n = 5$.

Figura 1. Intensidad proyectada/luminosidad total como función de la distancia al centro de la imagen, para M87 y para el politropo $n = 5$.

R E F E R E N C I A S

1. A. Poveda. La masa de las galaxias esféricas; M32, una posible aplicación. Boletín de los Observatorios de Tonantzintla y Tacubaya, N° 17, pág. 3, 1958.
2. J. Jeans. Astronomy and Cosmogony, pág. 25. Cambridge University Press, segunda edición, 1929.
3. A. S. Eddington, The Internal Constitution of the Stars. Cambridge University Press, 1926.
4. S. Chandrasekhar, An Introduction to the Study of Stellar Structure. The University of Chicago Press 1939.
5. S. Chandrasekhar, Op. cit., pág. 101.
6. L. Spitzer, Ap. J. **95**, 329; 1942.
7. S. Chandrasekhar, Op. cit., pág. 97.
8. S. Chandrasekhar, Op. cit., pág. 94.
9. G. de Vaucouleurs, Comptes Rendus **227**, 548; 1948.
10. Von Zeipel, Annales de L'Observatoire de Paris, Memoires 25, F29; 1908.
11. G. Hudson and J. Lipka, A table of Integrals.
12. Correspondencia personal con el Dr. W. Baum.
13. S. C. B. Gascoigne and E. J. Burr, M. N. **116**, 570; 1957.

THE POTENTIAL ENERGY OF THE POLYTROPIC SPHERE OF INDEX $n = 5$

The usual expression (eq. 1) for the potential energy of a polytropic sphere is indeterminate when the index n is equal to five. However, since some globular clusters have a distribution of density resembling the polytrope $n = 5$ it seems of interest to compute its value and to express it in terms of parameters more appropriate, to clusters of stars, than those used in the classical theory of polytropic spheres. Usually one has the central density λ and the scale α to be specified for a particular case. Instead of these parameters we introduce the total mass (or luminosity) M , and the radius of the circle concentric with the image and which contains one-half of the "projected" mass (light) expressed in radians multiplied by the distance to the cluster. This measure of the scale a , is similar to de Vaucouleurs' scale —on the plate— a_c .

By direct integration we obtain the potential energy (equation 6) which is expressed in terms of λ and α .

The relation between the conventional scale α and a is given in equation (13).

Equation (14) gives the projected densities of polytrope $n = 5$, according to von Zeipel's method.

Equation (15) gives the "projected" mass (or luminosity) contained within a circle of radius s concentric with the image of the cluster. Finally, equation (16) gives the potential energy with the new parameters. Contrary to what is stated by Chandrasekhar, we see that the potential energy is finite and well defined.

If, besides, we know the dispersion of velocities in a cluster, we can estimate the mass with the help of the virial theorem. The result of this consideration leads to equation (17), which expresses the mass in terms of the dispersion of velocities σ_{obs} and the scale a ; everything in c. g. s. units.

It is not devoid of interest to compare equation (17) deduced here with equation (6) of the previous paper; found from the empirical distribution of light in spherical galaxies. The two expressions for the mass differ only slightly; this is somewhat surprising in view of the difference between the empirical distribution of mass in spherical galaxies like M87 and that of $n = 5$. This is illustrated in figures 1 and 2. We conclude therefore that the mass estimate is not very sensitive to the mass distribution for configurations similar to those considered here.