"Aplicación de la relación de dispersión al potencial nuclear de los sistemas $^{12}C-^{12}C$ y $^{16}O-^{16}O$ a energías entre 10 y 90 MeV por nucleón"

María Magdalena González Sánchez
No.cta. 9350508-8 Facultad de Ciencias, UNAM.
magda@arrayan.ifisicacu.unam.mx.
Tel. 622-5027

Asesor de tesis: Dra. María Ester Brandan Siqués
IFUNAM, UNAM

Indice

0 Introducción **iii**

1 Marco Teórico **1**
1.1 Optica para el modelo óptico 1
1.2 Reacciones nucleares 3
1.2.1 Sección eficaz 5
1.2.2 Dispersión de Rutherford 6
1.2.3 Dispersión de electrones 8
1.2.4 Sección eficaz diferencial para reacciones de iones pesados 10

2 Modelo óptico **22**
2.1 Hipótesis 23
2.2 Descripción del potencial 23
2.3 Relación de dispersión 28
2.4 Trabajos anteriores 31

3 Método **34**
3.1 Solucion analítica a la relación de dispersión 34
3.2 Validación del programa 37
3.3 Selección de los potenciales 41
3.4 Ptolemy 42

4 Sistema $^{12}C +^{12} C$ **47**
4.1 Consideraciones. 49
4.2 Resultados y Discusión 51
4.3 Conclusiones. 58

5 Sistema $^{16}O +^{16} O$ 60
5.1 Singularidades del sistema 60
5.2 Ajuste fenomenológico 62
5.3 Consideraciones 69
5.4 Resultados y Discusión 71
5.5 Conclusiones 79

6 Discusión y conclusiones generales 81

Capítulo 0

Introducción

La naturaleza del ser humano lo ha llevado a buscar explicaciones a su existencia, evolución y estructura; dentro de esta búsqueda ha llegado a concebir al núcleo atómico como parte constitutiva de la materia, sin embargo no ha logrado describir o entender completamente los elementos necesarios para la formación de dichos núcleos o la interacción entre ellos. Se han desarrollado varios modelos físicos que tratan de describir dicha interacción, entre los cuales existe uno muy simple llamado Modelo Optico. Este modelo considera a los núcleos como cuerpos sin estructura interactuando a través de un potencial complejo [FE54]. Las partes (real e imaginaria) de este potencial se relacionan a través de una "relación de dispersión" [FE58, FE92] de tal forma que teniendo determinado alguno de los dos potenciales para toda energía y punto en el espacio se puede predecir la dependencia con la energía del otro en todo punto en el espacio. Previamente, este trabajo sólo se ha llevado a cabo para las integrales de volumen de potenciales que describen la interacción entre iones pesados [BR90] o para su valor en un solo punto [MA86a], donde toda dependencia espacial se pierde, de aquí que la motivación de esta tesis sea aplicar la relación de dispersión a los potenciales directamente. Debido a que los potenciales dependen del sistema estudiado nos centraremos en dos de los sistemas de iones pesados más estudiados: $^{12}C-^{12}C$ y $^{16}O-^{16}O$.

Esta tesis se divide esencialmente en tres secciones. En la primera sección (capítulo 1) se dan los conceptos de óptica y física de reac-

ciones nucleares necesarios para la comprensión del trabajo. La segunda sección (capítulo 2) es la presentación del modelo óptico y la justificación del trabajo. Por último, la tercera sección (capitulos 3, 4, 5 y 6) es el trabajo de investigación desde la metodología hasta las conclusiones.

Capítulo 1

Marco Teórico

Fue alrededor de 1950 con el descubrimiento de que la dispersión de neutrones por un núcleo tenía muchas de las características de la dispersión de la luz en una esfera transparente refractiva [FE49], cuando se pensó en un modelo de reacciones nucleares que aprovechara las analogías con fenómenos ópticos [FE58]. De aquí el interés de repasar algunos conceptos de óptica y física nuclear necesarios para el entendimiento del modelo óptico aplicado a reacciones nucleares.

1.1 Optica para el modelo óptico

[1] Cuando la luz pasa de un primer medio a un segundo medio cambia su velocidad de propagación, a este fenómeno se le llama refracción. Una forma de cuantificarlo es el índice de refracción que se define como el cociente de las velocidades de la luz en cada medio.

El cambio de velocidad se explica si se considera que el campo eléctrico de la luz incidente polariza las moléculas del segundo medio produciendo momentos dipolares oscilantes. Debido a la aceleración de estas cargas oscilantes se radia ondas electromagnéticas cuyo campo eléctrico tiene la misma frecuencia que el incidente pero que interfiere con él produciendo un nuevo campo eléctrico equivalente al incidente excepto

[1] El material de este capítulo se elaboró con las referencias [CR91, FE87, FE66, RE86]

por un cambio de fase, lo que se refleja en un cambio de velocidad en el material.

Una visión completa de este fenómeno es considerar una fuerza de amortiguamiento que evite la oscilación eterna de los dipolos, esta fuerza de amortiguamiento representa la transferencia de energía de las cargas oscilantes al medio debido a su rozamiento, la cual no esta incluida en ninguno de los campos eléctricos en cuestión, sino en forma de calor, por lo que se refleja en pérdida de energía del campo eléctrico; se dice entonces que también hay absorción. La forma de considerar la absorción con el índice de refracción es introducir un término imaginario, definiendo así un índice de refracción complejo $N = n + \iota n_a$

Para entender la afirmación anterior consideremos un campo eléctrico $\vec{E}$ de la forma:

$$\vec{E} = \hat{\mathrm{E}} E_0 \exp(-\iota(\omega t - kz))$$

donde $\hat{\mathrm{E}}$ es un vector unitario.$\vec{E}$ puede ser escrito como:

$$\vec{E} = \hat{\mathrm{E}} E_0 \exp(-\iota k(\frac{\omega}{k} t - z))$$

donde $\frac{\omega}{k}$ representa la velocidad de fase V_{ph}. Sabemos que además $V_{ph} = \frac{c}{n}$ entonces:

$$\vec{E} = \hat{\mathrm{E}} E_0 \exp -\iota\omega(t - n\frac{z}{c})$$

Con un índice de refracción complejo, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \hat{\mathrm{E}} E_0 \exp(-\iota\omega(t - N\frac{z}{c})) \\ &= \hat{\mathrm{E}} E_0 \exp(-\iota\omega(t - (n + \iota n_a)\frac{z}{c})) \\ &= \hat{\mathrm{E}} E_0 \exp(-\iota\omega(t - n\frac{z}{c})) \exp(-\omega n_a \frac{z}{c}) \end{aligned}$$

de donde es claro ver que el término imaginario del índice de refracción introduce un factor de amortiguamiento en la amplitud de E, por

lo que la intensidad ($|E|^2$) de la onda resultante es proporcional a $\exp(-2\omega n_a \frac{z}{c})$.

Por lo tanto un término imaginario en el índice de refracción expresa la absorción de la luz por el medio.

Por último sólo recordaremos que el índice de refracción depende también de la frecuencia de la luz, lo que da lugar al fenómeno de dispersión.

1.2 Reacciones nucleares

[2] En la sección anterior se vio cómo el índice de refracción da información sobre el medio en el que incide la luz, esta información es obtenida al analizar cómo es refractado un haz de luz en ese medio, pero existen otros fenómenos tales como la reflexión, difracción y absorción de luz que también pueden ser analizados y obtenerse información tal como tamaño, forma, transparencia, etc. Este mismo principio se utiliza en reacciones nucleares, donde el interés radica en conocer las propiedades y estructura del núcleo.

Si se quiere ver los detalles de un objeto es necesario iluminar con radiación de longitud de onda (λ) menor que su tamaño. Utilizando luz visible ($\lambda \approx 10^{-7}m$) sólo es posible estudiar objetos mayores a $1\mu m$; sin embargo utilizando electrones con energía cinética de $1keV$ ($\lambda = \frac{h}{(2m_eE)^{\frac{1}{2}}} = 0.3 \times 10^{-10}m$) se puede llegar a dimensiones atómicas y moleculares. Un núcleo tiene un radio de aproximadamente $5fm$ y los neutrones y protones son 10 veces más pequeños, así que si se quiere una radiación con longitud de onda menor a estas dimensiones es necesario usar partículas con un alto momento lineal ($p = \frac{h}{\lambda}$), lo cual se logra aumentando la energía cinética de las partículas incidentes o usando partículas más masivas, como iones pesados; de aquí surge el interés en el estudio de las reacciones nucleares entre iones pesados.

Existen varios tipos de reacciones nucleares que pueden ocurrir:

[2] El material de esta sección se elaboró con las referencias [SA80a, SA83]

1. Dispersión elástica. Cuando los núcleos resultantes de la reacción son los mismos que el proyectil (a) y blanco (A), incluyendo sus estados internos, la energía cinética en el sistema centro de masa se conserva y el valor Q es cero. Es decir: $a + A \longrightarrow a + A$.

2. Dispersión inelástica. Cuando los núcleos resultantes son los mismos que el proyectil (a) y el blanco (A) pero alguno de los dos se encuentra en algun estado excitado, entonces el valor Q de la reacción es $-E_e$ (donde E_e es la energía de excitación del núcleo resultante) y entonces la energía cinética disponible para la emisión de a y A será menor que en el caso elástico. Es decir: $a + A \longrightarrow a + A^* - E_e$ o $a + A \longrightarrow a^* + A - E_e$.

3. Rearrreglo. Cuando los nucleones constituyentes de los núcleos proyectil y blanco se rearreglan y forman nuevos núcleos. Es decir: $a + A \longrightarrow b + B + Q$.

4. Reacción de captura. Cuando los núcleos se colapsan formando un solo núcleo excitado el cual al regresar a su estado base emite rayos γ. Es decir $a + A \longrightarrow C + \gamma + Q$.

5. Fragmentación. Cuando son más de 2 los núcleos resultantes. Es decir: $a + A \longrightarrow b + B + C + Q$.

6. Otros

A cada uno de estos tipos de reacciones se les llama canales de reacción y dada una colisión, tienen una probabilidad de ocurrir representada por la sección eficaz. Si la probabilidad de que ocurra una reacción es distinta de cero se dice que es un canal abierto.

1.2.1 Sección eficaz

[3] El concepto de sección eficaz se introduce por la necesidad de cuantificar la probabilidad de que ocurra una reacción nuclear. Considerando una reacción nuclear: $a + A \longrightarrow b + B$, es claro que el número de partículas b emitidas por unidad de tiempo es proporcional a el flujo de partículas a por unidad de area (I_o) incidiendo sobre un blanco que contiene N núcleos de tipo A. A la constante de proporcionalidad se le llama sección eficaz y tiene dimensiones de área (barn=$100 fm^2$), así pues la sección eficaz es:

$$\sigma = \frac{no.\ de\ particulas\ b\ emitidas}{(\frac{no.\ part.\ a\ incidentes}{area\ de\ incidencia})(no.\ núcleos\ A\ en\ el\ blanco)}$$

Si nos preguntamos por el número de partículas b emitidas por unidad de tiempo dentro de un elemento de ángulo sólido $d\sigma$ en la dirección con angulos polares (θ, ϕ) con respecto al haz incidente, se tiene que también es proporcional a $d\sigma$ como a I_o y N (ver figura 1.1). En este caso la constante de proporcionalidad es la sección eficaz diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ que también tiene dimensiones de área.

Si ninguno de los espines de las particulas dispersadas estan polarizados, la sección eficaz diferencial tendrá una simetría azimutal entonces, se tiene que:

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta \, d\theta$$

Como canales de reacción diferentes corresponden a núcleos en diferentes estados de energía, no habrá interferencia entre las amplitudes de probabilidad correspondientes. A la suma de todas las secciones eficaces de los canales no-elásticos (es decir, todos aquellos que no son elásticos) se le llama sección eficaz de absorción o reacción. La sección eficaz total se obtendrá al sumar también la sección eficaz del canal elástico y significará la probabilidad de que algo suceda.

La importancia de definir el concepto de sección eficaz y del análisis

[3] El material de esta subsección se elaboró con las referencias [SA80a, SA83]

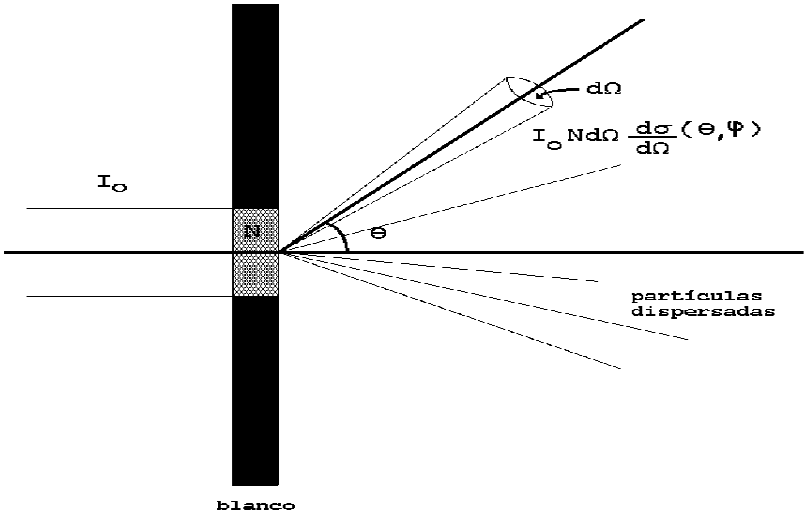

Figure 1.1: *Diagrama para la definición de sección eficaz diferencial*

de ella para el canal elástico se puede observar en la dispersión de Rutherford, y el alcance del conocimiento obtenido a través de ella en la dispersión de electrones por un núcleo.

1.2.2 Dispersión de Rutherford

[4] Para 1911 Sir J.J. Thompson había propuesto un modelo del átomo a partir de su descubrimiento del electrón, considerando al núcleo como un pudín de carga positiva en el cual se incrustaban pasas de carga negativa (electrones) de tal forma que hicieran el átomo eléctricamente neutro. El profesor Ernest Rutherford, quien había sido discípulo de

[4]El material de esta subsección se elaboró con las referencias [AC75, BE71a, DA94, SA80a, SA83], además de las referencias en ella incluídas.

Thompson y dos de sus estudiantes, Hans Geiger y Ernest Marsden, realizaron un experimento en el que una hoja delgada de oro fue bombardeada con partículas α de energía cinética de $7.68MeV$ procedentes de una fuente de $Po - 214$. Se esperaba que un estudio de los ángulos de dispersión de las partículas α que pasaran a través de la hoja, diera detalles de los átomos que actuaban como dispersores. Se observó que una de cada 8000 partículas α era dispersada a ángulos mayores de 90°, lo que no estaba de acuerdo con las predicciones del modelo de Thompson que suponía que sólo una de cada 10^{3500} se dispersaría a ángulos mayores a 90°. Fue entonces cuando Rutherford propuso su modelo atómico suponiendo un núcleo de carga positiva con un radio menor a $10^{-14}m$, efectuó un estudio teórico del ángulo de dispersión para ambos modelos y comparó con lo experimental, desechandose así el modelo de Thompson.

La fórmula deducida por Rutherford (suponiendo que la única interacción presente es la Coulombiana) [RU11] para la sección eficaz diferencial fue:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E_{cm}})^2 \frac{1}{sen^4(\frac{1}{2}\theta_{cm})}$$

donde:
Z_1, Z_2: números atómicos de las partículas del haz incidente y de los núcleos blanco.
E_{cm}: energía en el centro de masa.
θ_{cm}: ángulo de dispersión de la partícula incidente medido en el centro de masa.

En la figura 1.2 se muestra el cálculo de la sección eficaz diferencial para la dispersión de α en Au.

Cabe hacer notar que en el experimento de Rutherford la fuerza que gobierna la dispersión es la Coulombiana y que practicamente el único canal posible era el elástico, pues debido a la energía de las partículas alfa, la distancia de máximo acercamiento era de $2.96 \times 10^{-14}m$ que es mayor a lo que ahora sabemos son las dimensiones del núcleo atómico.

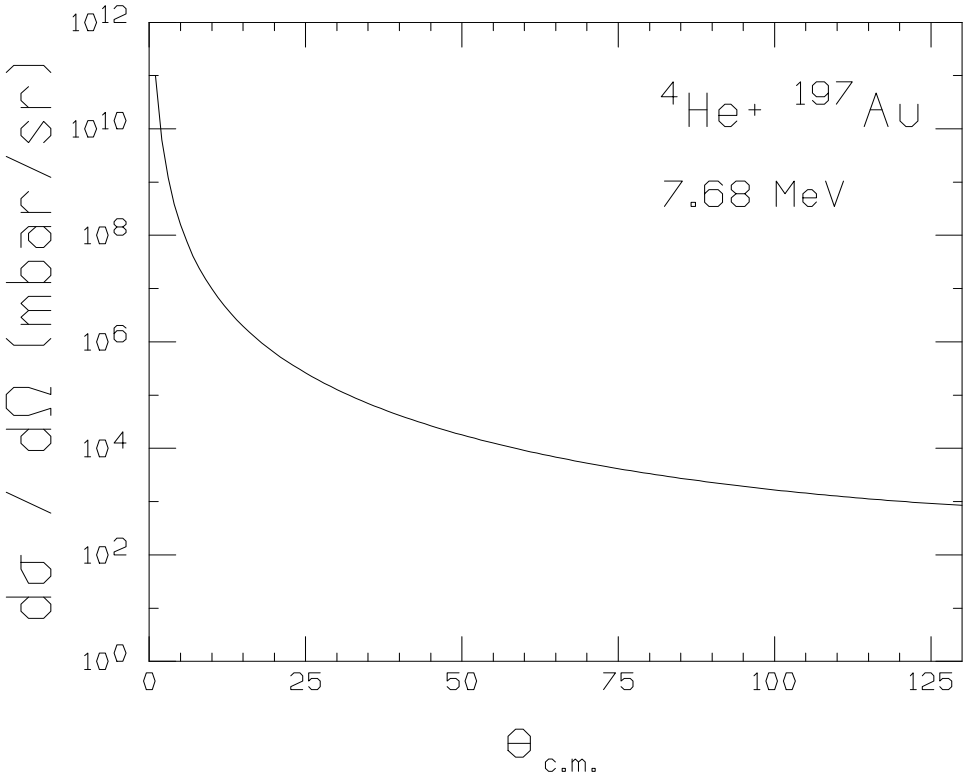

Figure 1.2: *Se muestra la sección eficaz diferencial para la partículas alfa con una energía de 7.68 MeV por un núcleo de Au, calculada a partir de la expresión de Rutherford para la sección eficaz diferencial*

1.2.3 Dispersión de electrones

[5] La distribución de protones en un núcleo está asociada a su distribución de carga la cual puede ser determinada a partir de experimentos donde la fuerza gobernante sea la Coulombiana, es por esto que se han llevado a cabo experimentos de dispersión de electrones a energías alrededor de los 200 MeV, lo que implica $\lambda \leq 1fm$.

Debido a que los electrones tienen una masa de 0.5 MeV (que es menor que la de las partículas α), en el estudio de su dispersión se hace

[5]El material de esta subsección se elaboró con las referencias [DA94, SA80a, SA83, HO71, HO78], además de las referencias en él incluídas.

necesario tomar en cuenta importantes correcciones relativistas para energías de cientos de keV. Además un electrón puede trasferir parte de su energía a los electrones atómicos con los que impacta y saca de su órbita, siendo estos últimos indistinguibles de los electrones proyectiles, por lo que se necesita además un tratamiento cuántico. Por todo esto, este tipo de estudios se centra en el canal elástico.

No es posible calcular la distribución de carga directamente a partir de los datos experimentales, por lo tanto primero se postula una distribución de carga y con medios analíticos y técnicas de cómputo se calcula la dispersión elástica para ser comparada con los datos.

Se han propuesto diversas formas para esta distribución radial de carga, por ejemplo:

1. Distribución Gaussiana:

$$\rho_c(r) = \frac{1}{1 + exp(\frac{r-R_c}{a_c})^2}$$

2. Woods-Saxon o de Fermi:

$$\rho_c(r) = \frac{\rho_0}{1 + exp(\frac{r-R_c}{a_c})}$$

donde R_c, a_c y ρ_0 son parámetros variados sistemáticamente para optimizar el ajuste a los datos experimentales. En el caso de una distribución de carga de Woods-Saxon (WS) el parámetro a_c representa la difusividad, es decir el intervalo de r en el cual la densidad de carga cae desde un 90% a un 10% de su valor a $r = 0$. R_c representa el radio en el que la densidad de carga vale un 50% del valor al centro ($r = 0$). Además R_c es proporcional a la raíz cúbica del número de nucleones ($A^{\frac{1}{3}} r_0 = R_c$, con $r_0 = 1.07 fm$). Ver figura 1.3.

En la figura 1.4 se muestran las distribuciones de carga nucleares obtenidas de la dispersión elástica de electrones y se comparan con las calculadas tomando en cuenta el tamaño del protón y la corrección por el movimiento del centro de masa. Estos resultados muestran el tipo de información que se puede obtener de analizar la sección eficaz de una reacción.

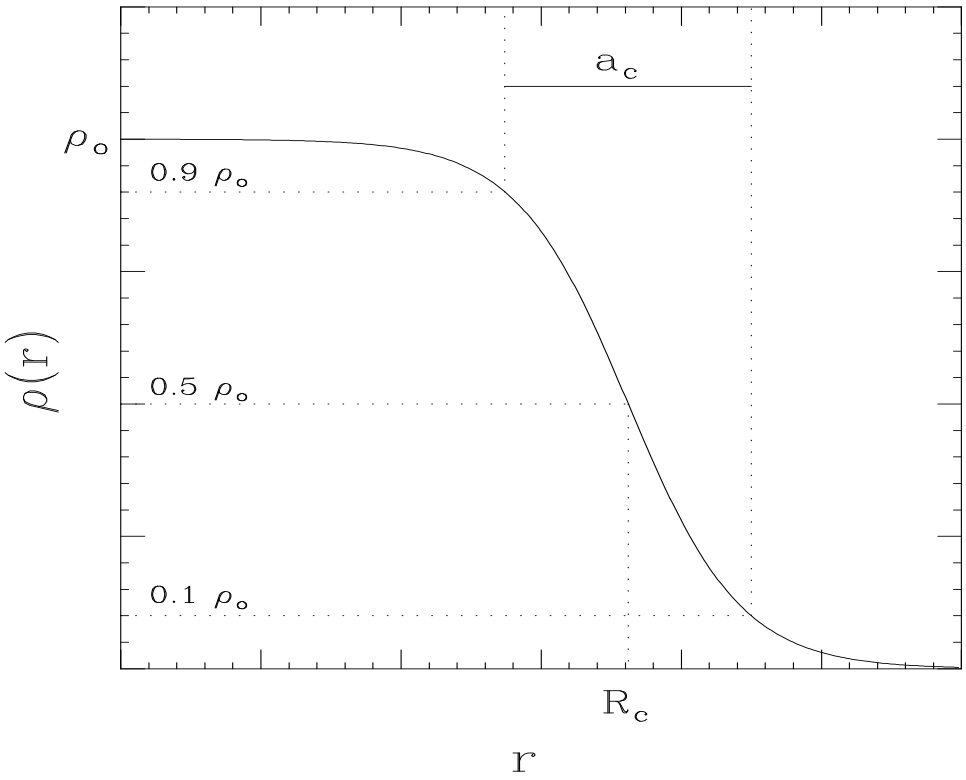

Figure 1.3: *Esquema de una función Woods-Saxon.*

1.2.4 Sección eficaz diferencial para reacciones de iones pesados

[6] En las dos subsecciones anteriores se ha visto la necesidad de entender y explicar las secciones eficaces diferenciales de reacciones nucleares para la obtención de información acerca de los núcleos y la interacción entre ellos, en especial el estudio del canal elástico. Es posible en principio, estudiar y analizar la sección eficaz para cualquier canal de reacción, pero se prefiere el canal elástico por ser el más simple.

En los primeros experimentos de dispersión elástica con iones pesados

[6] El material de esta subsección se elaboró con las referencias [BR97, BR89, GO74, HO71, SA80a, BR96], además de las referencias en ella incluídas.

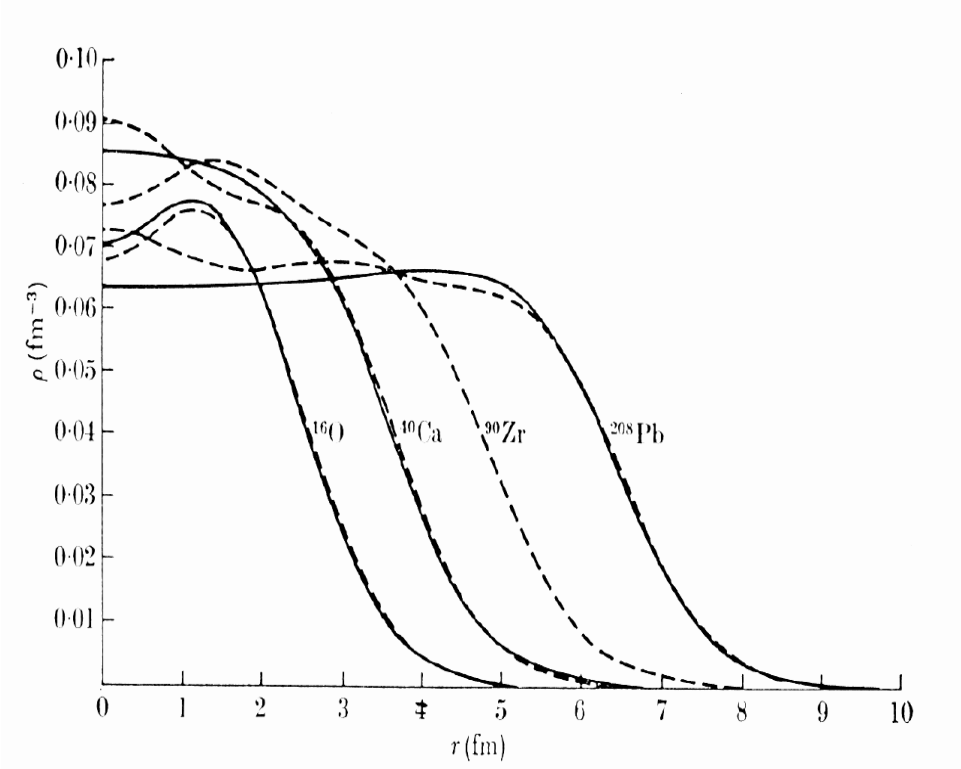

Figure 1.4: *Distribuciones de carga nuclear obtenidas a partir de la dispersion elástica de electrones (línea sólida) comparadas con las propuestas a partir de distribuciones de Woods-Saxon y consideraciones del tamaño del protón y movimiento del centro de masa.*

(años 70's) se observó una fuerte absorción en los sistemas, lo que se explicaba por el gran traslape de las materias nucleares que conducía la reacción a un canal distinto del elástico; esto implicaba tener poca información acerca de los núcleos en su superficie e interior. Las secciones eficaces diferenciales presentaban sólo patrones de difracción de tipo Fresnel y Fraunhofer que hacía pensar que se tenía un cuerpo opaco que no daría mayor información que su tamaño. Sin embargo, más tarde, experimentos de dispersión de partículas alfas [GO74] mostraron efectos refractivos que hicieron pensar en la existencia de algunos sistemas que no fuesen opacos sino translúcidos, de los cuales se podría obtener gran información de su superficie e interior, esto fue reforzado

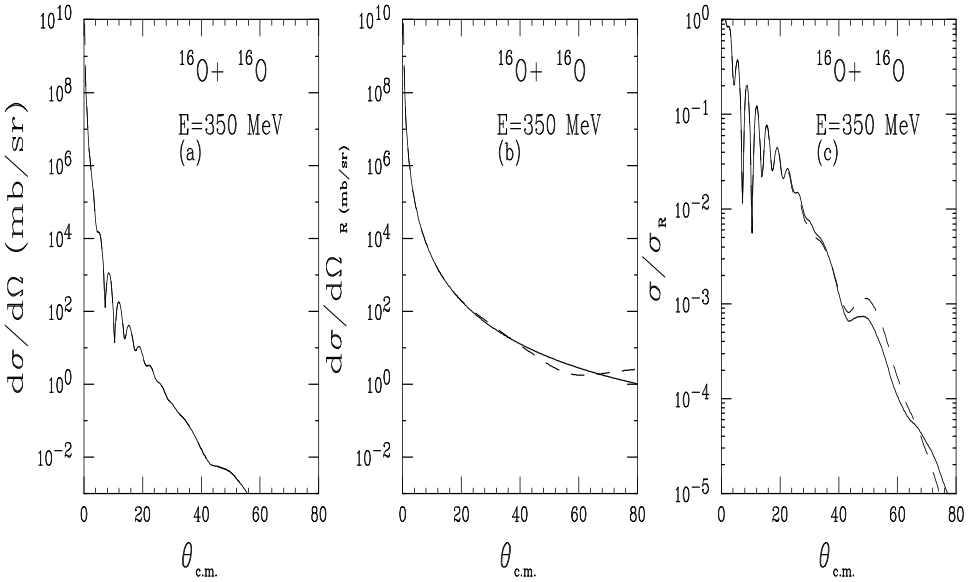

Figure 1.5: *(a)Sección eficaz diferencial típica considerando las interacciones nuclear y coulombiana. En la línea segmentada además, se toma en cuenta la indistinguibilidad de los núcleos. (b) Sección eficaz diferencial calculada considerando únicamente la interacción coulombiana. Línea segmentada, igual que en (a). (c) Sección eficaz diferencial normalizada por la sección Rutherford.Línea segmentada, igual que en (a).*

con la aparición de dichos efectos refractivos en experimentos de dispersión de iones pesados ligeros tales como ^6Li [DE77, SC80], ^{12}C [BO82, BR82, BU82] y ^{16}O [ST89]. De aquí el interés de estudiar en esta sección las características generales de la sección eficaz diferencial del canal elástico para reacciones de iones pesados.

Una sección eficaz diferencial típica para el canal elástico en una reacción nuclear a energías entre 10 y 90 MeV por nucleón es la mostrada en la figura 1.5(a), en la que se observa una estructura oscilante sobre un comportamiento decreciente; esto no es sorprendente si se considera que en este tipo de reacciones las interacciones presentes son la coulombiana y la nuclear (objetivo del estudio), así que si se calcula la sección eficaz diferencial contribuida sólo por la interacción coulombiana se tiene la figura 1.5(b). Se observan dos cosas importantes de la comparación de

ambas secciones, la primera es que las oscilaciones presentes en (a) no se deben solamente a la interacción coulombiana, y la segunda es que la presencia de la interacción nuclear disminuye el valor de la sección. La disminución de la sección eficaz diferencial se explica al pensar que a estas energías los núcleos ya alcanzan a traslaparse y dar lugar a otro tipo de reacciones como fragmentación, excitación, rearreglo, etc. que contribuyen a la absorción disminuyendo la probabilidad del canal elástico y por lo tanto el valor de su sección eficaz diferencial. Las oscilaciones se explicarán más adelante.

Como el interés se encuentra en la interacción nuclear, se busca una manera de observar los efectos introducidos por ella en la sección eficaz diferencial, de aquí que se normalice por la sección calculada con la formula de Rutherford (ya sea en su forma clásica o cuántico-relativista para sistemas de partículas idénticas llamada de Mott), obteniendo secciones como la mostrada en la figura 1.5 (c), donde se ven muy claramente las desviaciones de la sección con respecto a la sección calculada con Rutherford, destacandose las oscilaciones y la disminución de la sección respecto del valor unitario.

De ahora en adelante el estudio de las secciones eficaces diferenciales se llevará a cabo analizando estas nuevas secciones eficaces diferenciales normalizadas llamandolas simplemente distribuciones angulares.

Las distribuciones angulares cambian de sistema a sistema, es decir no es la misma para una reacción $^{16}O -^{12} C$ que para una $^{12}C -^{12} C$, además también dependen de la energía del ion proyectil, para darse una idea de esta dependencia vease la figura 1.6, donde se observa que, conforme aumenta la energía, las oscilaciones se van concentrando en ángulos más cercanos a cero y la distribución angular decrece más rápidamente. Esto es lógico, pues conforme aumenta la energía se van abriendo canales diferentes al elástico y por lo tanto va aumentando la absorción. En el caso de reacciones nucleares donde el ion proyectil es igual al ion blanco, se tienen efectos cuánticos por la indistinguibilidad de los núcleos en la reacción, estos efectos se manifiestan como una distribuci'on angular simetríca alrededor 90°, explicando así las oscilaciones como las que se observan en la figura 1.6 alrededor de 90° en las

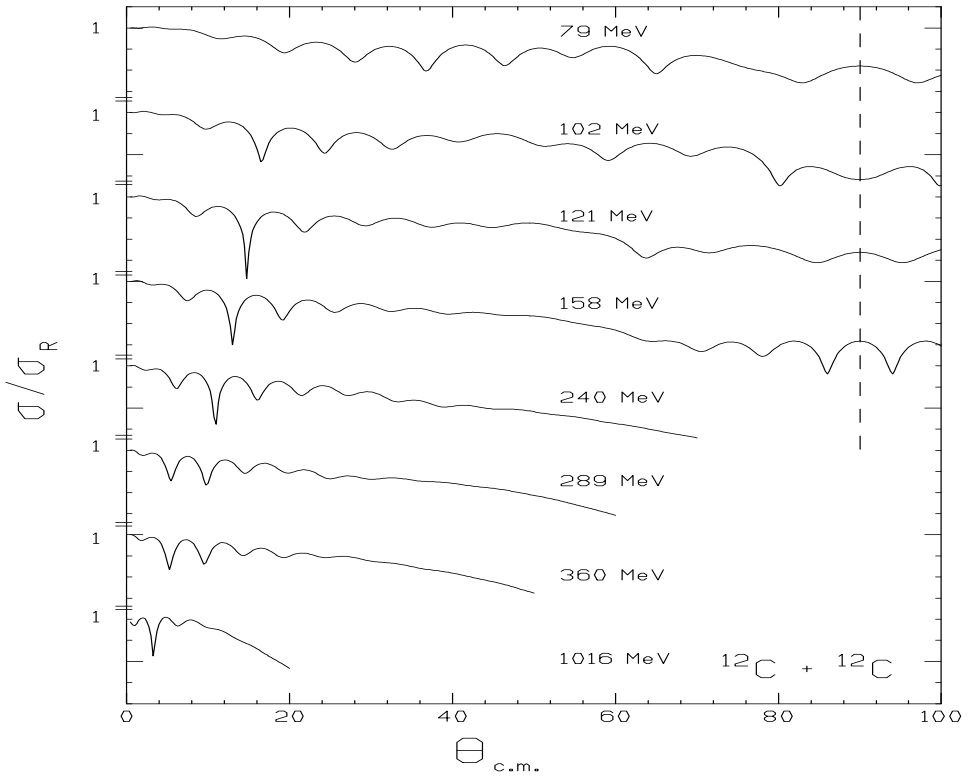

Figure 1.6: *Evolución de la distribución angular conforme varía la energía de los núcleos proyectiles. La línea segmentada ayuda a apreciar la simetría de la distribución angular alrededor de* 90°.

energías de 79, 102 y 121 MeV.

Aunque en las reacciones de iones pesados la longitud de onda es suficientemente pequeña comparada con el tamaño de los núcleos, la teoría semi-clásica no es capaz de dar resultados cuantitativos precisos, pero sin embargo da argumentos que justifican cualitativamente la estructura de la distribución angular. Así pues se utilizarán resultados de la aproximación WKB para explicar cualitativamente las distribuciones angulares.

Si uno considera la ecuación de Schrödinger como una ecuación de partícula, en el límite semi-clásico la descripción de la dispersión se

aproxima a la mecánica clásica y uno puede hablar de trayectorias y parámetros de impacto, pero si uno trata la ecuación de Schrödinger como una ecuación de onda, la descripción se aproxima a la óptica geométrica y se habla de índices de refracción; es decir las descripciones con mecánica de partículas u ondulatoria están relacionadas en una visión semi-clásica asociando la trayectoria de una partícula con cada onda parcial.

La aproximación WKB para la ecuación de Schrödinger de una partícula es usada para obtener la función de onda como una suma de términos semi-clásicos, cada uno de ellos correspondiendo a una trayectoria clásica diferente. En el caso de reacciones nucleares de iones pesados, la aproximación WKB se generaliza [KN76] a potenciales o índices de refracción complejos para considerar la absorción de los sistemas, donde las soluciones complejas describen los fenómenos difractivos de Fraunhofer y Fresnel y los efectos refractivos.

En sistemas con débil absorción, la aproximación WKB nos da una representación de trayectorias reales dependientes del parámetro de impacto como se muestra en la figura 1.7. La trayectoria t1 tiene un parámetro de impacto tal que el el potencial Coulombiano es quien principalmente gobierna la interacción, entonces la deflexión de esta trayectoria depende de la carga eléctrica de los núcleos interactuantes y de la energía cinética del proyectil; en el caso de iones pesados livianos (por ejemplo Li, C, O y Mg) y de energía entre 10 y 90 MeV por nucleón, resulta ser de un par de grados o menos. El ángulo de deflexión para este tipo de trayectorias se define positivo. Conforme el parámetro de impacto disminuye se esperaría en el caso de interacción puramente coulombiana, que el ángulo de deflexión aumentara, sin embargo por la interacción atractiva nuclear este ángulo llega a un máximo llamado "ángulo de arcoiris coulombiano" (θ_C) (trayectoria t2), para luego disminuir hasta tomar valores negativos (trayectoria t4 y t5). Si el parámetro de impacto sigue disminuyendo las trayectorias se introducirán en la esfera de potencial y la distribución de nucleones cambiará el valor de la interacción a la que es sometida, siendo menos atractiva, así que el ángulo de deflexión llegará a un valor mínimo llamado "ángulo de arcoiris nuclear" (θ_N) (trayectoria t6), para luego

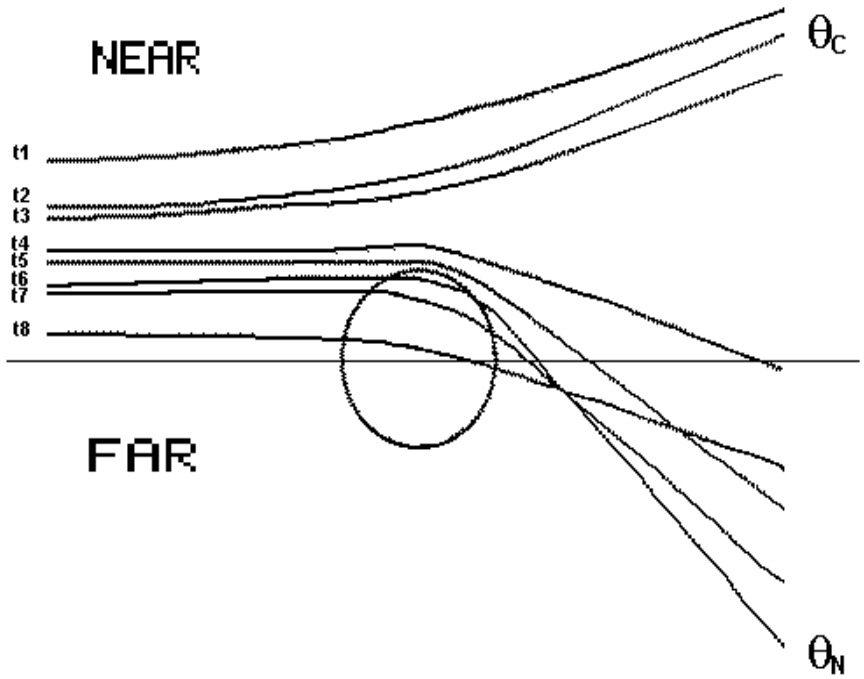

Figure 1.7: *Representación por trayectorias dada por la aproximación WKB.El círculo representa un potencial esférico, compuesto de un potencial Coulombiano y un potencial nuclear débilmente absorbente.*

volver a aumentar (trayectoria t7 y t8).

Para ángulos menores a θ_N se esperaría que la sección eficaz diferencial fuese cero, sin embargo cuánticamente se predice un decaimiento exponencial claramente determinado a partir del valor de θ_N, que depende del valor de la fuerza nuclear y no de la probabilidad de canales diferentes al elástico, es decir no depende de la absorción del sistema.

Como $L = \hbar(l + \frac{1}{2}) = pb$ y $p = \frac{\hbar}{k}$ (donde p es el momento lineal, b el parámetro de impacto y k el número de onda), entonces el momento angular (en unidades de $\hbar$) y el parámetro de impacto están relacionados por la expresión:

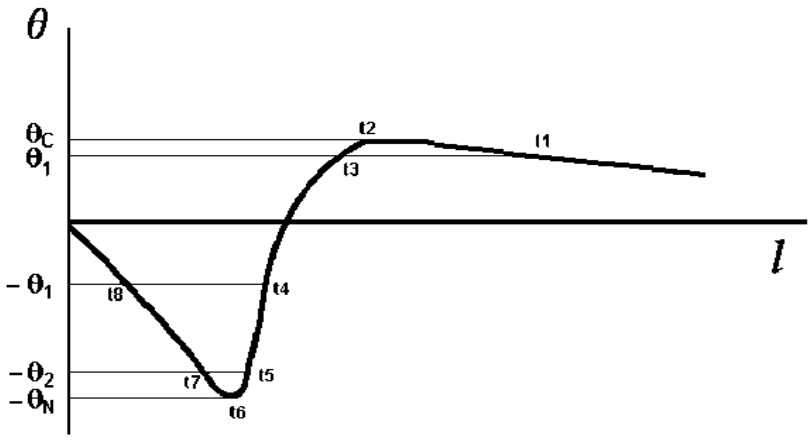

Figure 1.8: *Esquema de la función de deflexión donde se muestran los angulos de dispersión de las trayectorias predichas por la aproximación WKB, mostradas en la figura anterior. Se muestra también el ángulo de arcoiris de Coulomb y Nuclear.* θ_n *significa el ángulo de deflexión para la trayectoria n de la figura anterior.*

$$b = \frac{l + \frac{1}{2}}{k}$$

A la función que nos da la dependencia del ángulo con respecto a el momento angular se le llama función de deflexión y se muestra en la figura 1.8. Se observa que hay trayectorias deflectadas a un mismo ángulo, como la t1 y t3 que interferirán dependiendo de su diferencia de fase, dando lugar a la difracción de Fresnel (sin interés para el presente trabajo). Trayectorias como la t4 y t8 del lado FAR (vease figura 1.7)

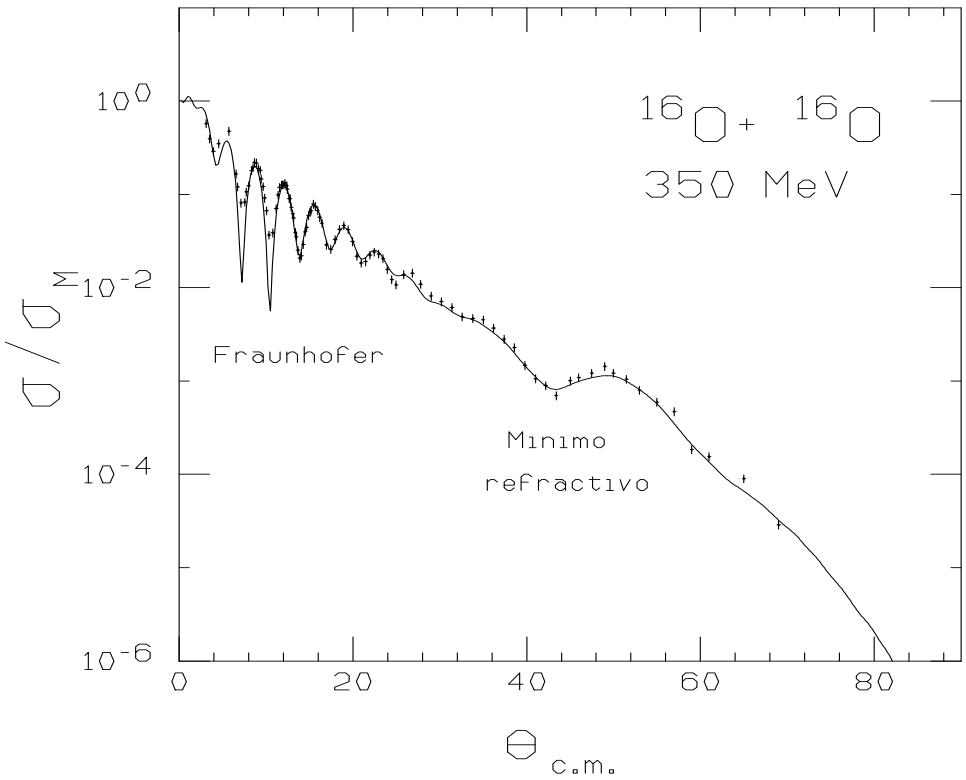

Figure 1.9: *Distribución angular para el sistema $^{16}O - ^{16}O$ donde los efectos refractivos se han observado de forma espectacular. La línea sólida es el cálculo del modelo óptico y los puntos son los datos experimentales.*

interferirán con la t1 y t3 del lado NEAR dando lugar a la difracción de Fraunhofer que en la distribución angular se refleja en oscilaciones similares a las de la figura 1.9 entre 0 y 24 grados. Por último, para ángulos grandes, sólo tendremos interferencia de dos trayectorias, la t5 y t7 (por tener ángulos negativos estas trayectorias también se consideran del lado FAR) que darán los efectos refractivos que se manifiestan en la distribución angular como una gran estructura oscilante similar a la que se presenta en la figura 1.9 y que tiene como uno de sus mínimos aproximadamente en 44°.

Más adelante se verá la importancia de conocer el valor de θ_N en cada sistema; en la práctica es difícil inferir su valor de simplemente obser-

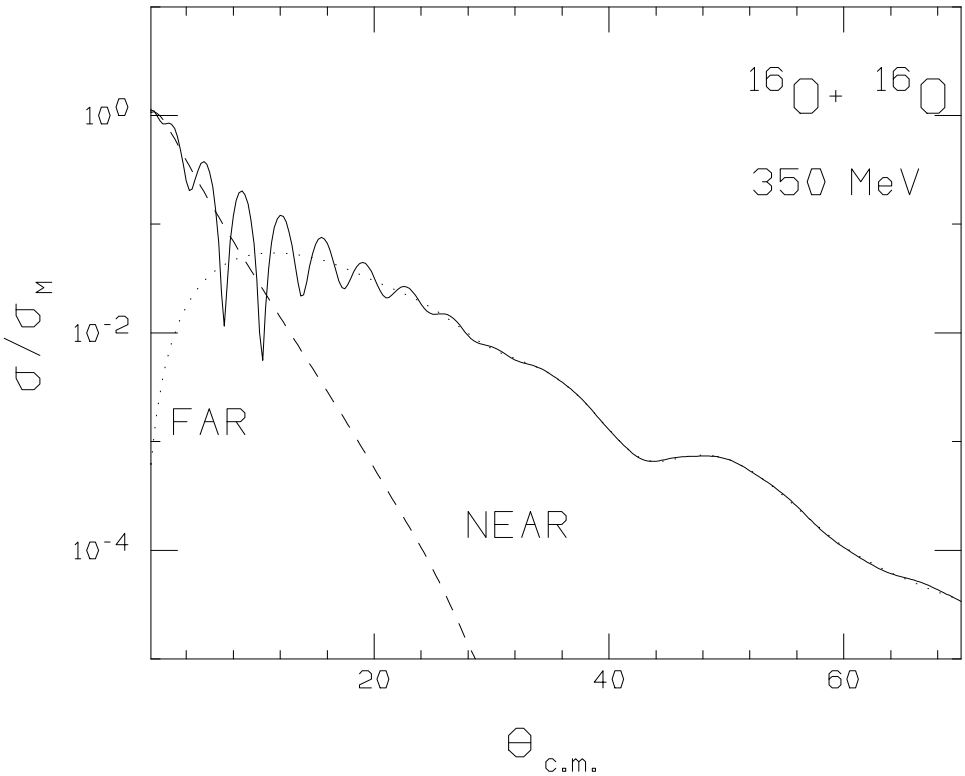

Figure 1.10: *Descomposición de trayectorias NEAR-FAR de la distribución angular a partir de un análisis semiclásico de trayectorias.*

var la distribución angular, pues se encuentra justo donde el comportamiento de la distribución angular comienza a ser una caída exponencial, lo que no es fácil de determinar de los datos experimentales; así que se recurre a determinar la posición del mínimo anterior a θ_N. En la figura 1.9 este mínimo anterior a θ_N se encuentra en aproximadamente 44°.

Haciendo un análisis de las contribuciones de cada trayectoria a la sección eficaz distinguiendo las del lado FAR de las del lado NEAR, se obtiene la figura 1.10, dejando claro el dominio de la contribución FAR a ángulos grandes causando los efectos refractivos, y la interferencia NEAR-FAR como causa de las oscilaciones de Fraunhofer a ángulos

pequeños.

Sólo para dejar claro que la estructura refractiva de la distribución angular no depende de la absorción del sistema, mientras la absorción sea débil, se recuerda que en el caso de ondas incidiendo en una esfera semitransparente refractiva, el efecto de la absorción se ve en la amplitud de la onda resultante, es decir en el valor de la sección eficaz diferencial; no afecta ni la fase ni la frecuencia de la luz y como la estructura de la distribución angular se debe a la diferencia de fase en trayectorias que se deflectan a un mismo ángulo, no depende de la absorción del sistema. En la figura 1.11 se calcula la distribución angular para diferentes valores de la absorción, mostrando que la estructura refractiva de la distribución angular no cambia, así como tampoco la posición del mínimo anterior a θ_N, por esta razón este tipo de análisis, en el que se calcula la distribución angular con una disminución de un 50% en la absorción, resulta útil para localizar el mínimo anterior al ángulo de arcoiris nuclear.

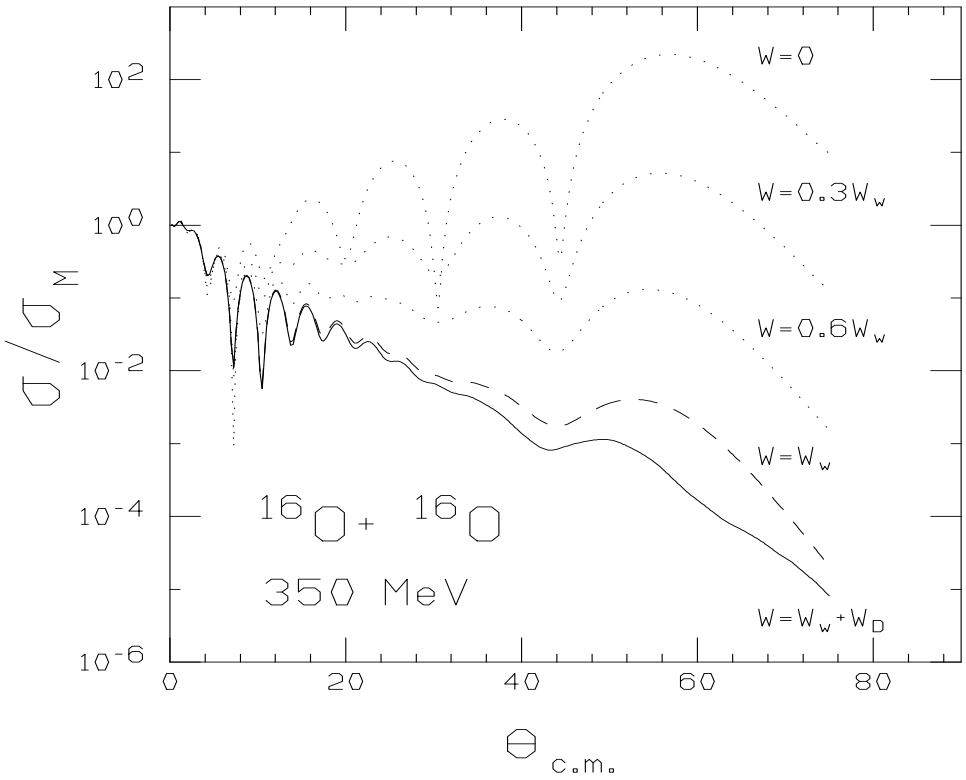

Figure 1.11: *Distribución angular calculada para diferentes valores de absorción del sistema. Las líneas punteadas son cálculos considerando una disminución de un 30% en la absorción cada vez. La línea sólida considera el potencial imaginario como la suma de un término de volumen W_w, dado por un WS^2 (definido en la sección 2.2) y uno de superficie W_D, dado por una derivada de WS. La línea segmentada es el mismo cálculo anterior pero sin tomar en cuenta el término de superficie.*

Capítulo 2

Modelo óptico

[1] Después de que los experimentos de dispersión de partículas alfas llevados a cabo por Rutherford y Chadwick [RU29] en cobre, aluminio, helio, hidrogeno, magnesio y uranio, mostraron la existencia de una nueva interacción diferente a las conocidas, con características de ser muy fuerte y de corto alcance, además del descubrimiento del neutrón como constituyente del núcleo, se comenzaron a efectuar experimentos de dispersión de neutrones que tenían la ventaja de no sentir la interacción coulombiana y así interactuar con el núcleo a bajas energías. En 1949, S. Fernbach explica la sección eficaz diferencial de dispersión de neutrones de 90 MeV sobre diferentes núcleos como aluminio, litio, uranio entre otros [FE49] a partir de resaltar características semejantes a la dispersión de la luz por una esfera semitransparente refractiva, proponiendo así un potencial complejo que considera la absorción del sistema. Tres años más tarde, experimentos de dispersión de neutrones a energías entre 0.5 y 3.2 MeV por núcleos más pesados que el magnesio, fueron llevados a cabo por un grupo dirigido por Barschall, quien después de analizar las secciones eficaces [BA52] se dió cuenta que, a pesar de las marcadas diferencias en la forma de las secciones eficaces para elementos de diferentes pesos atómicos, la dependencia con la energía de estas secciones era similar, sugiriendo que dependían de propiedades nucleares generales como el radio y no de la estructura particular de cada núcleo. Con estos antecedentes, H. Feshbach en 1954

[1] El material de este capítulo se elaboró con las referencias [MC70, SA80a, HO71, BR97], además de las incluídas en él.

propone un modelo [FE54] para reacciones nucleares con neutrones que dio lugar al hoy conocido modelo óptico para reacciones nucleares.

2.1 Hipótesis

El modelo óptico es el más simple de todos los modelos nucleares, representa la interacción de dos núcleos en términos de un potencial, lo que permite describir la dispersión cuando la absorción no es muy fuerte (pues en el caso de una absorción fuerte, lo más que se puede conocer es el tamaño del sistema), así como resolver la ecuación de Schrödinger en todo el espacio y así construir la función de onda.

Los núcleos se consideran como cuerpos sin estructura interactuando a través de un potencial U que depende de la distancia r entre los centros de masas de los núcleos y su energía relativa E. Este potencial se sabe es no-local, es decir que el movimiento de un nucleón proyectil es afectado por las variables dinámicas al menos de sus nucleones vecinos; sin embargo predicciones con potenciales locales son suficientemente buenas como para poder despreciar en general, la no-localidad. Este potencial local $U(r, E)$ debe de ser tal que tome en cuenta la absorción del sistema (es decir toda la información diferente al canal elástico), así que haciendo un análogo con la dispersión de luz por cuerpos opacos, donde un índice de refracción complejo es requerido, se infiere la necesidad de tener un potencial complejo; de esta analogía resulta natural la dependencia con la energía del potencial así como el índice de refracción depende de la frecuencia.

2.2 Descripción del potencial

Como se dijo anteriormente, el potencial nulear óptico es complejo, $U(r, E) = V(r, E) + \iota W(r, E)$. el término real representa la interacción nuclear promedio, contiene la información del canal elástico, el término imaginario contiene información acerca de la absorción del sistema, es decir sobre todos los canales de reacción diferentes al elástico, por lo que se dice es un flujo de información del canal elástico. Si la ab-

sorción del sistema es débil, lo que en términos de potenciales significa $W \ll V$, el término real determinará la estructura de la distribución angular de la reacción, mientras que el imaginario afecta la magnitud de la dispersión elástica.

Considerando la función que describe la distribución de masa de un núcleo, se proponen potenciales reales e imaginarios con forma de Woods-Saxon [WO54]:

$$f(r,E) = -\frac{f_o(E)}{1+exp(\frac{r-r_f(E)}{a_f(E)})}$$

donde $f(r,E)$ representa el potencial dependiente de la distancia entre los centros de masa de los núcleos r, y su energía relativa E; el parámetro $f_o(E)$ es la profundidad del potencial, es decir su valor a $r=0$; $r_f(E)$ es el radio para el cual $f(r_f) = -f_o/2$ (la parametrización $r_f = r_{of}(A_p^{\frac{1}{3}} + A_b^{\frac{1}{3}})$ donde A_p y A_b son las masas atómicas del núcleo proyectil y blanco respectivamente, se usa habitualmente) y a_f es la difusividad, es decir el intervalo de r para el cual el potencial cae de un 90% a un 10% de su valor a $r=0$. Debido a que los parámetros f_o, r_f y a_f deben ajustarse para describir las distribuciones angulares, a estos potenciales se les llama fenomenológicos. Para describir los datos de algunos sistemas como $^{16}O-^{16}O$ se han propuesto potenciales fenomenológicos con otro tipo de forma [BR91a], tales como:

- Woods-Saxon elevados al cuadrado, WS^2:

$$f(r,E) = -\frac{f_o(E)}{\left[1+exp(\frac{r-r_f(E)}{a_f(E)})\right]^2}$$

- Derivadas de Woods-Saxon:

$$f(r,E) = -\frac{4f_o(E)exp(\frac{r-r_f(E)}{a_f(E)})}{\left[1+exp(\frac{r-r_f(E)}{a_f(E)})\right]^2}$$

Figure 2.1: *Coordenadas usadas en el cálculo del potencial de doble convolución.*

En el caso del potencial real, también se tienen los llamados potenciales microscópicos o de doble convolución. Su importancia radica en que su cálculo toma en cuenta una interacción efectiva nucleón-nucleón realista, en general esta interacción es una combinación de potenciales locales v_{pb} los cuales dependen de la densidad de masa nuclear local de los nucleones interactuantes y de la energía de bombardeo. Los potenciales de doble convolución pueden escribirse:

$$V_f(r) \;=\; \iint \rho_p(r_p)\rho_b(r_b)v_{pb}(E,\rho_p,\rho_b,r_{pb})\,dr_b\,dr_p$$

con $r_{pb} = r + r_p - r_b$, donde por simplicidad, el espin e isoespin son ignorados. r es la distancia entre los centros de masa de los núcleos y ρ_b, ρ_p son las densidades nucleares para el blanco y proyectil respectivamente, las que en general son descritas por cálculos del modelo de

capas o por funciones de Fermi ajustadas; r_p, r_b y r_{pb} se muestran en la figura 2.1.

La interacción efectiva más conocida y usada es la M3Y [SA79] que no tiene una dependencia explícita de la densidad nuclear y sólo una débil dependencia con la energía. Esta interacción efectiva es repulsiva a distancias menores que $\approx 0.5fm$ y atractiva a distancias mayores que $\approx 0.5fm$, lo que le da la característica de realista. En el modelo de capas para la estructura nuclear se tiene la saturación de capas, algo similar sucede para la interacción nuclear, en donde ahora se tiene la saturación de materia nuclear que restringe el potencial nuclear; esta idea de la saturación tiene bases teóricas en interacciones nucleón-núcleo y en interacciones núcleo-núcleo está siendo estudiada. Una manera de introducir la saturación de materia nuclear en la interacción efectiva fue dándole una dependencia explícita con la energía, lo que dio lugar a la interacción DDM3Y [KO82, EL85]. Más tarde con los estudios de Khoa y colaboradores [KH93, KH94, KH95a, KH95b] se incluyó en el tratamiento un término de intercambio de nucleones de alcance finito, proponiendose la interacción efectiva DDM3Y1. Una manera de introducir la saturación efectiva es definiéndola como un producto de la interacción M3Y y una función dependiente de la densidad nuclear, donde esta función es una potencia de la densidad nuclear [BE71b], entonces de acuerdo a la potencia n a la que esté elevada la densidad nuclear es el nombre que recibirá la interacción, es así como aparecen las interacciones BDM3Yn.

En realidad los potenciales de doble convolución son los potenciales calcualdos V_f multiplicados por un factor de normalización N_D que se ajusta para describir las distribuciones angulares. Se afirma que el cálculo de V_f es bueno si N_D está dentro del intervalo 0.9-1.1, es decir el potencial requerido por los datos no varía más de un 10% respecto del potencial V_f.

Uno de los problemas que se tuvo en el uso de potenciales fenomenológicos en el análisis de distribuciones angulares de dispersión elástica fue la aparición de ambigüedades discretas, es decir que se encontraron conjuntos de parámetros para el potencial real discretamente diferentes,

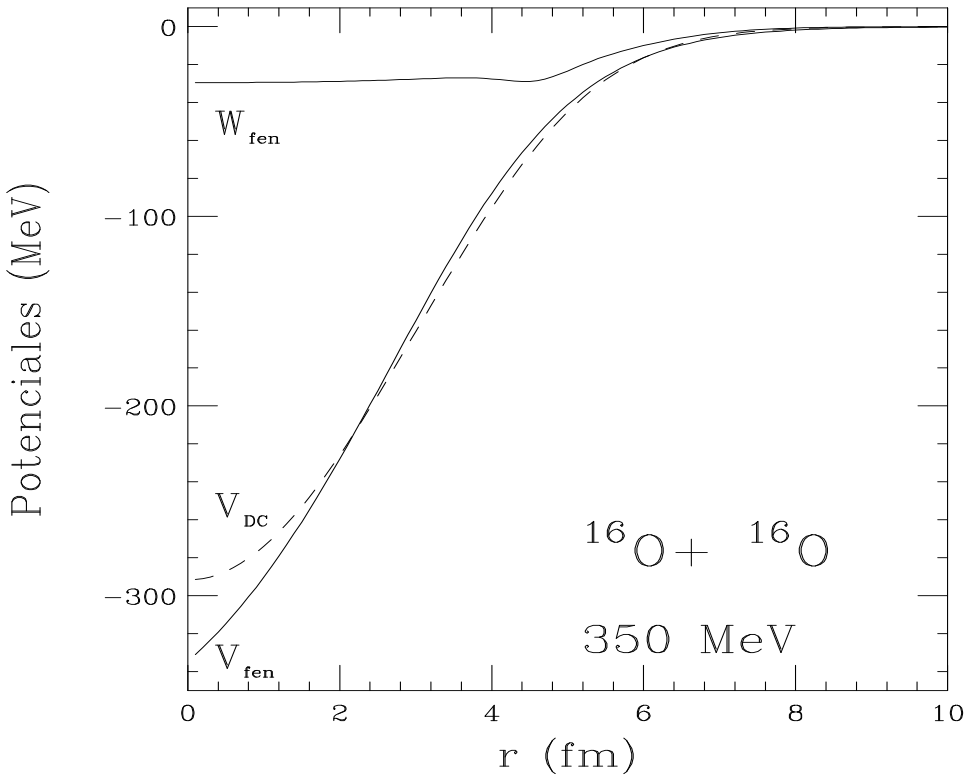

Figure 2.2: *Se muestran en línea sólida potenciales fenomenológicos real e imaginario. En línea segmentada, un potencial real de doble convolución.*

que describían igualmente bien la distribución angular. Si el análisis en un mismo sistema se hacía para diferentes energías se observaban diferentes "familias de potenciales", donde los elementos de cada familia tenían profundidades similares, así se hallaron potenciales profundos y poco profundos que describían igualmente bien las distribuciones angulares. Más tarde estas ambigüedades fueron resueltas con la aparición y determinación del primer mínimo de arcoiris, mostrando que los potenciales reales tenían que ser profundos [GO74], siendo consistente con los cálculos de potenciales reales de doble convolución que implicaba creer en estas interacciones efectivas "realistas".

En la figura 2.2 se muestran potenciales fenomenológicos, real e imagi-

nario, en línea sólida y en línea segmentada un potencial real de doble convolución calculado a partir de la interacción efectiva BDM3Y1. Se observa que los potenciales fenomenológicos tienen forma diferente a los de doble convolución, sin embargo ambos son capaces de describir las distribuciones angulares igualmente bien, lo que sugiere que no se tiene un pleno conocimiento del valor del potencial punto a punto. Es por esto que se definen las integrales de volumen de los potenciales, que representan una característica promedio de la forma del potencial. La integral de volumen de un potencial $f(r, E)$ es:

$$J_f(E) \;=\; 4\pi \int f(r,E) r^2 \, dr$$

Un análisis de las integrales de volumen ha mostrado que éstas presentan una misma dependencia con la energía, no solo cualitativamente sino tambien cuantitativamente (ver figura 2.3), en todos los sistemas de iones pesados ligeros estudiados.

Kramers-Kronig dan una expresión que relaciona los términos real e imaginario del índice de refracción [JA75]; así pues existe otra para los dos términos del potencial nuclear llamada "relación de dispersión", propuesta por Feshbach [FE58].

Existe una relación de dispersión equivalente para las integrales de volumen que se obtiene sustituyendo W por J_w y V por J_v, que suele ser útil cuando no se tiene bien determinada la dependencia radial de W.

2.3 Relación de dispersión

La teoría microscópica del potencial óptico propone un potencial óptico microscópico de la forma:

$$U(r,E) \;=\; V_0(r) \;+\; \Delta V(r,E) \;+\; \iota W(r,E)$$

que se deduce de la siguiente manera.

La función de onda para el sistema proyectil-blanco es desarrollada

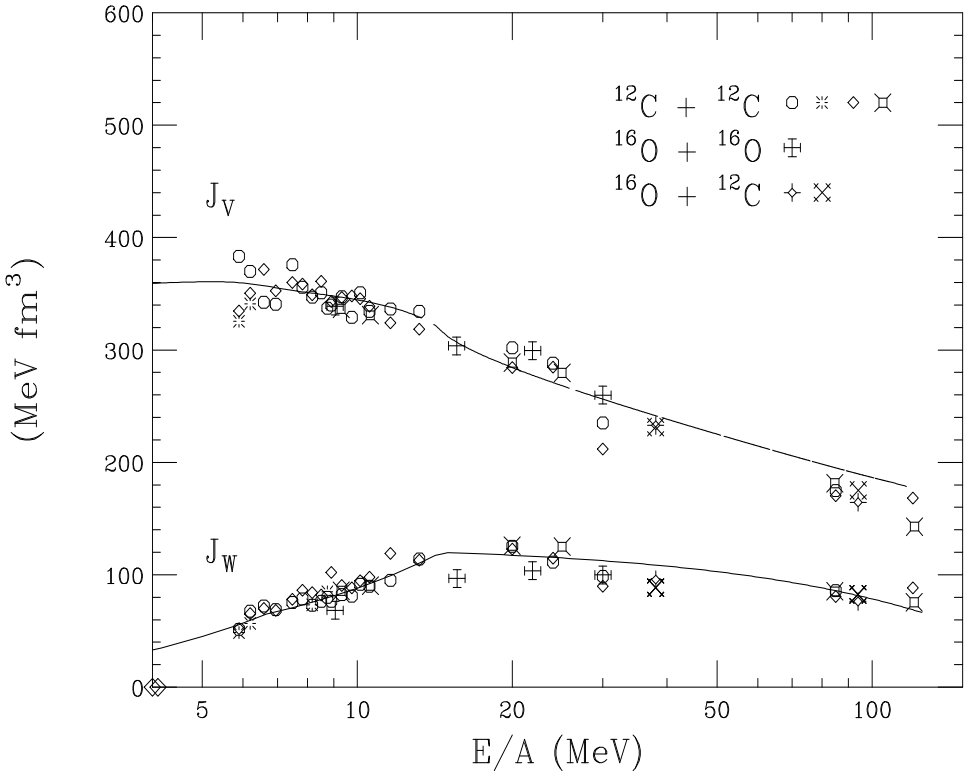

Figure 2.3: *Compendio de integrales de volumen de potenciales reales e imaginarios como función de la energía cinética por nucleón del ion proyectil para tres sistemas. Los símbolos son resultado de análisis con potenciales fenomenológicos y de doble convolución. Las curvas son predicciones usando la relación de dispersión para el sistema* $^{12}C - ^{12}C$. *Tomado de [BR97]*

en términos de un conjunto completo de autoestados internos de los núcleos individuales:

$$\Psi = \sum_{ij} \chi_{ij}(r)\phi_{p_i}(\xi_p)\phi_{b_j}(\xi_b),$$

donde $\chi_{ij}(r)$ describe el movimiento relativo cuando los núcleos estan en sus estados internos etiquetados i y j. Entonces el estado χ_{00} da la dispersión elástica si $i, j = 0$ etiqueta el estado base. Se quiere una interacción efectiva o potencial óptico que genere $\chi_{00}(r)$ cuando sea usado en la ecuación de Schrödinger para un solo cuerpo. Utilizando

la expansión anterior dentro de la ecuación de Schrödinger de muchos cuerpos e integrando sobre las coordenadas internas resulta un conjunto infinito de ecuaciones acopladas para $\chi_{ij}(r)$. Si se usa el formalismo del operador de proyección de Feshbach para eliminar la referencia explicita a los canales no elásticos [FE92, SA83], se obtiene una expresión exacta para la interacción efectiva equivalente, la cual actúa sólo sobre el canal elástico y determina $\chi_{00}(r)$. Entonces se puede escribir:

$$U(r,E) \;=\; V_o(r) \;+\; \Delta U(r,E)$$

donde V_o es el potencial de doble convolución V_F que depende suavemente de la energía, su dependencia proviene de la no-localidad debido al intercambio de nucleones, por lo que se dice que es su dependencia es de naturaleza "espúrea"; ΔU se llama potencial de polarización dinámico y proviene del acoplamiento a los canales no-elásticos. Entonces se puede escribir:

$$U(r,E) \;=\; V_F(r) \;+\; \Delta V(r,E) \;+\; \iota W(r,E)$$

Si se calcula la transformada de Fourier del potencial U, se verá que su dependencia con la energía corresponde a una nolocalidad en el tiempo, por lo que se dira que que es una dependencia "intrínseca". Entonces el requerimiento de causalidad, es decir que la función de onda al tiempo t no sea influída por el valor de la función de onda para los tiempos $t' > t$, dará la relación de dispersión [FE58, FE92]:

$$\Delta V(r,E) \;=\; \frac{P}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(r,E')}{E'-E}\,dE' \tag{2.1}$$

donde P es el valor principal de la integral.

Se observa en primer lugar que si se tiene bien determinado el potencial imaginario a toda energía y radio, se puede calcular la dependencia intrínseca con la energía del potencial real; además de que si la forma radial de W no depende de la energía, la forma radial de ΔV será la misma que la de W; así como que si existe una variación bien localizada en E del potencial imaginario deberá suceder una variación localizada en ΔV.

Existe una relación de dispersión equivalente para las integrales de volumen [MA86a] que se obtiene sustituyendo W por J_w y V pot J_v, que suele ser útil cuando no se tiene bien determinada la dependencia radial de W.

2.4 Trabajos anteriores

A principios de los 80's estudios de las secciones eficaces para sistemas como $\alpha +^{40} Ca$, $\alpha +^{16} O$, $^{16}O +^{208} Pb$, $^{32}S +^{40} Ca$ entre otros, dieron evidencia de la presencia de una "anomalía" en la dependencia del potencial real con la energía. Esto se refería a la observación de que para energías cerca de la barrera coulombiana el potencial real era cada vez más atractivo con el aumento de la energía hasta llegar a un máximo para luego comenzar a ser cada vez menos atractivo conforme aumentaba la energía, entonces a la aparición inesperada (por no estar los autores al tanto de la relación de dispersión) de este máximo o campana en el potencial real se le llamó "anomalía del umbral".

En 1986, Mahaux, Ngô y Satchler realizaron un estudio de la relación de dispersión [MA86a], su origen y su comparación para sistemas nucleón-núcleo y nucleón-nucleón. También propusieron una solución analítica a la relación de dispersión a partir de un potencial imaginario parametrizado por tres rectas. Con esta solución analítica calcularon las contribuciones dispersivas $\Delta V(r_o, E)$ a un radio fijo r_o donde se tenía bien determinado el valor del potencial real $V_o(r_o)$, para después calcular el potencial real dependiente de la energía en ese radio, reproduciendo y explicando así la presencia de anomalías en los potenciales reales del sistema $^{16}O +^{208} Pb$ como una consecuencia del rápido incremento de $|W|$ en el intervalo de energías donde se presentaba la anomalía. La débil absorción en el sistema $\alpha +^{16} O$ permitió determinar los valores de las integrales de volumen, real e imaginaria, para un gran conjunto de energías. En las integrales de volumen real se observó el mismo tipo de anomalía que presentaban los potenciales reales, lo que se explicó nuevamente cuando al aplicar la relación de dispersión a las integrales de volumen imaginarias para obtener la dependencia con la

energía de las integrales de volumen reales, se reprodujo la observación.

El estudio se extendió [MA86b] aplicando la relación de dispersión a potenciales imaginarios, en el sistema $\alpha +^{16} O$, dependientes no sólo de la energía sino también del radio, obteniendo así contribuciones dispersivas, $\Delta V(r, E)$, para toda energía y radio. Se describieron una vez más, las anomalías en el potencial real, y en el caso del sistema $\alpha +^{40} Ca$, donde se trabajó con las integrales de volumen, se describieron las anomalías en las integrales reales de volumen; además se explicó la dependencia con la energía del potencial real en la dispersión de partículas α como la consecuencia de que:

1) La forma de $\Delta V(r, E)$ depende de la energía debido a la dependencia de la forma de $W(r, E)$ con la energía, especialmente a bajas energías donde se presenta un incremento de $|W|$ conforme aumenta la energía, pues se van abriendo canales no-elásticos.

2) Si la forma radial de $W(r, E)$ no depende de la energía, tampoco la forma radial de $\Delta V(r, E)$. Es decir si $W(r, E) = g(E)f(r)$, entonces $\Delta V(r, E) = h(E)f(r)$. Sin embargo la forma radial del potencial real sí dependerá de la energía pues $V(r, E) = V_o + h(E)f(r)$.

Lo novedoso de este trabajo [MA86b] fue que se calcularon utilizando la relación de dispersión las contribuciones dispersivas sustraídas, $\Delta V(r, E; E_r) = \Delta V(r, E) - \Delta V(r, E_r)$, donde E_r es una energía de referencia para la que se tiene determinada la forma del potencial real, y luego se compararon con las empíricas, $\Delta V(r, E; E_r) = V(r, E) - V(r, E_r)$, encontrando un acuerdo en ambas, principalmente entre 2 y 4 fm para energía menores a 80 MeV.

Más tarde, un análisis de la dispersión elástica en el sistema $^{12}C +^{12} C$ a energías mayores a 6 MeV por nucleón utilizando potenciales reales profundos [BR90], mostró que la dependencia con la energía de la integral de volumen real era consistente con la predicción de la relación de dispersión aplicada a la integral de volumen imaginaria. Esta dependencia con la energía de la integral de volumen real era mucho más débil que la observada en sistemas más pesados como $^{16}O +^{60} Ni$ o

$^{16}O +^{208} Pb$, donde el incremento del potencial imaginario con la energía era más rápido.

Grandes progresos se han logrado recientemente [BR97, SA91] en la determinación de los potenciales y eliminación de las ambigüedades discretas en ellos; también se han tomado medidas de secciones eficaces diferenciales para una gama de energías en distintos sistemas y se han analizado a partir de potenciales fenomenólogicos, permitiendo ahora conocer mejor la evolución de los potenciales con la energía en ciertos sistemas y haciendo posible la aplicación de la relación de dispersión a los potenciales mismos, dependientes de la energía y el radio, objetivo de la presente tesis.

Capítulo 3

Método

3.1 Solucion analítica a la relación de dispersión

[1] El objetivo de esta tesis es aplicar la relación de dispersión a potenciales imaginarios dependientes de la energía y del radio para obtener la dependencia con la energía de los potenciales reales y de aquí obtener potenciales reales dependientes de la energía y del radio. Estos potenciales calculados se compararán con los que describen los datos y además, se usarán para predecir distribuciones angulares.

Sabemos que:

$$V(r,E) = V_o(r) + \Delta V(r,E) \tag{3.1}$$

donde $\Delta V(r,E)$ está dada por la relación de dispersión:

$$\Delta V(r,E) \;=\; \frac{P}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(r,E')}{E'-E}\,dE' \tag{3.2}$$

y $V_o(r)$ es un potencial local que se supone independiente de la energía.

En sistemas núcleo-núcleo, se sabe poco acerca de $V_o(r)$, por lo que resulta impráctico el cálculo de los potenciales reales a partir de la

[1] El material de este capítulo se elaboró con las referencias [MA86a, MA86b, BR97], además de las incluídas en él.

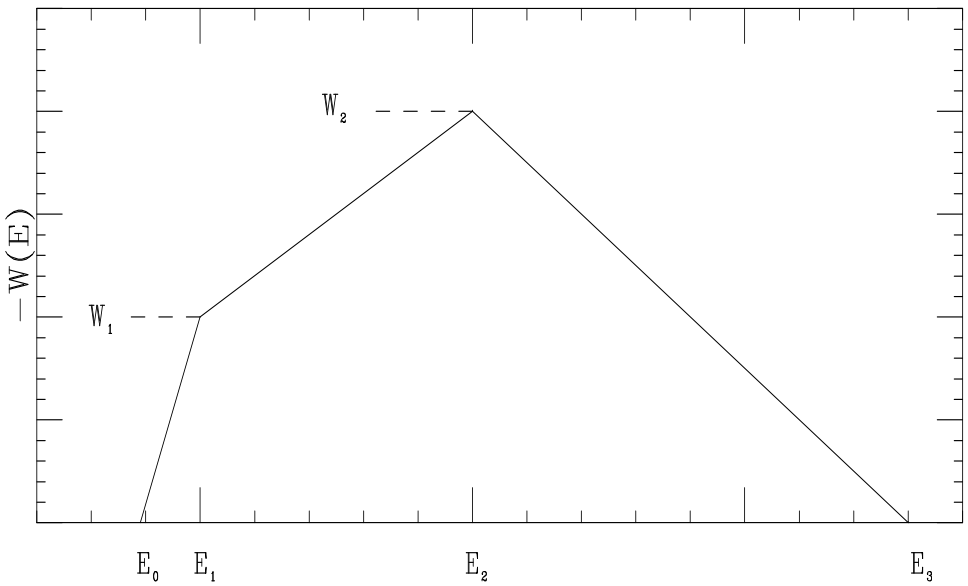

Figure 3.1: *Aproximación del potencial imaginario como función de la energía en términos de 3 rectas.*

relación de dispersión y la ecuación 3.1. Sin embargo la forma sustraída de la relación de dispersión:

$$\Delta V_{E_r}(r,E) = \Delta V(r,E) - \Delta V(r,E_r)$$

nos permite calcular el potencial real como:

$$V(r,E) = V(r,E_r) + \Delta V_{E_r}(r,E) \tag{3.3}$$

donde $V(r,E_r)$ es el potencial real en una energía "de referencia" E_r. Entonces ahora basta tener bien determinada la forma radial del potencial real a una energía dada E_r y resolver 3.2 para calcular $\Delta V_{E_r}(r,E)$.

Mahaux y colaboradores [MA86a] dan la siguiente solución analítica a la integral 3.2 proponiendo un potencial imaginario parametrizado por tres rectas:

$$\pi\Delta V(r,E) \;=\; W_1\Big[\frac{\epsilon_0}{\Delta E_1}\ln(\frac{\epsilon_0}{\Delta E_1}) - \frac{\epsilon_1}{\Delta E_1}\ln(\frac{\epsilon_1}{\Delta E_1})\Big] +$$

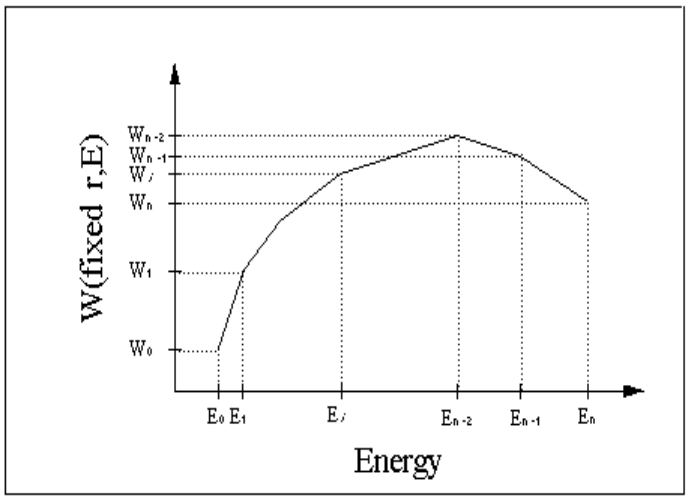

Figure 3.2: *Aproximación del potencial imaginario como función de la energía en términos de n rectas.*

$$
\begin{aligned}
&(W_2 - W_1)\Big[\frac{\epsilon_1}{\Delta E_2}\ln(\frac{\epsilon_1}{\Delta E_2}) - \frac{\epsilon_2}{\Delta E_2}\ln(\frac{\epsilon_2}{\Delta E_2})\Big] - \\
&W_2\Big[\frac{\epsilon_2}{\Delta E_3}\ln(\frac{\epsilon_2}{\Delta E_3}) - \frac{\epsilon_3}{\Delta E_3}\ln(\frac{\epsilon_3}{\Delta E_3})\Big] - \\
&W_1\Big[\eta\ln\eta - (\eta+1)\ln(\eta+1)\Big], \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

donde $W_1, W_2 > 0$ y $W_i = W(E_i)$, E_i está definido en la figura 3.1, $\Delta E_i = E_i - E_{i-1}$, $\epsilon_i = E - E_i$ y $\eta = \Delta E_2/\Delta E_3$.

De aquí que tomando en cuenta un potencial imaginario parametrizado por n rectas, generalizamos la ecuación 3.4 obteniendo:

$$\begin{aligned}\pi\Delta V(r,E) &= \Delta W_1\left[\frac{\epsilon_0}{\Delta E_1}\ln(\frac{\epsilon_0}{\Delta E_1}) - \frac{\epsilon_1}{\Delta E_1}\ln(\frac{\epsilon_1}{\Delta E_1})\right] + ... + \\ &\quad \Delta W_{n-1}\left[\frac{\epsilon_{n-2}}{\Delta E_{n-1}}\ln(\frac{\epsilon_{n-2}}{\Delta E_{n-1}}) - \frac{\epsilon_{n-1}}{\Delta E_{n-1}}\ln(\frac{\epsilon_{n-1}}{\Delta E_{n-1}})\right] \\ &\quad +\Delta W_n\Big[\eta\ln\eta - (\eta+1)\ln(\eta+1)\Big], \qquad (3.5)\end{aligned}$$

donde $\Delta W_i = W_i - W_{i-1}$, $W_i = W(r, E_i)$, E_i está definido en la figura 3.2, $\Delta E_i = E_i - E_{i-1}$, $\epsilon_i = E - E_i$ y $\eta = (E_{n-1} - E_{n-2})/(E_n - E_{n-1})$.

Otra de las ventajas de utilizar la forma sustraída de la relación de dispersión es que, en contraste con $\Delta V(r, E)$, $\Delta V_{E_r}(r, E)$ depende débilmente de la parametrización de W a altas energías. Entonces, en la solución analítica basta escoger una "adecuada" E_n, tal que si $E_m > E_n$, el cálculo de $\Delta V_{E_r}(r, E)$ no varíe significativamente, y n suficientemente grande para que la parametrización de W por n rectas se parezca al valor de $W(r, E)$ que se desea.

3.2 Validación del programa

Elaboramos un programa de cómputo en lenguaje FORTRAN que evalúa la ecuación 3.5 y se probó con el sistema $\alpha+^{16}O$, estudiado por Mahaux y colaboradores [MA86b], con el fin de determinar el valor óptimo de E_n y n, y verificar que el programa calculaba correctamente $\Delta V_{E_r}(r, E)$.

En el estudio realizado por Mahaux y colaboradores, se calculó $\Delta V_{E_r}(r, E)$ para las energías de 20, 60, 80, 100 y 120 MeV, tomando como energía de referencia $E_r = 48\ MeV$ y la parametrización del potencial imaginario:

$$W(r,E) = -\frac{25}{\left[1 + exp\left(\frac{r - R_w(E)}{1.3}\right)\right]^2}$$

donde:

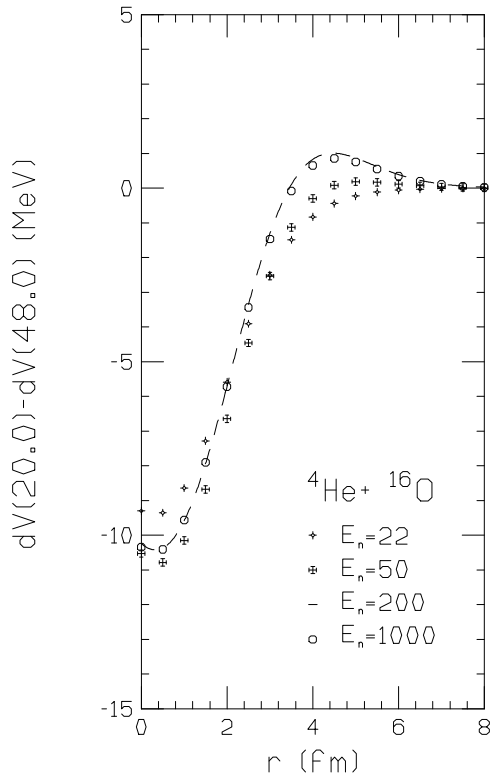

Figure 3.3: *Cálculo de* $\Delta V_{48}(r, 20)$ *con* $n = 200$ *y* E_n *=22, 50, 200 y 1000* MeV

$$R_w(E) = -79.525E^{-1} + 5.786 - (4.06x10^{-3})E$$

Con la misma energía de referencia y parametrización de W , calculamos $\Delta V_{E_r}(r, E)$ para la energía de 20 MeV. En la figura 3.3 se muestran diferentes cálculos parametrizando W con 200 segmentos rectos y diferentes valores de E_n; se observa cómo el cálculo va convergiendo conforme se aumenta el valor de E_n, de tal forma que considerar $E_n = 200$ MeV o $E_n = 1000$ MeV ya no hace ninguna diferencia en el cálculo. Esto significa que tomar E_n 10 veces mayor que la energía a la que se realiza el cálculo, nos asegurá la convergencia

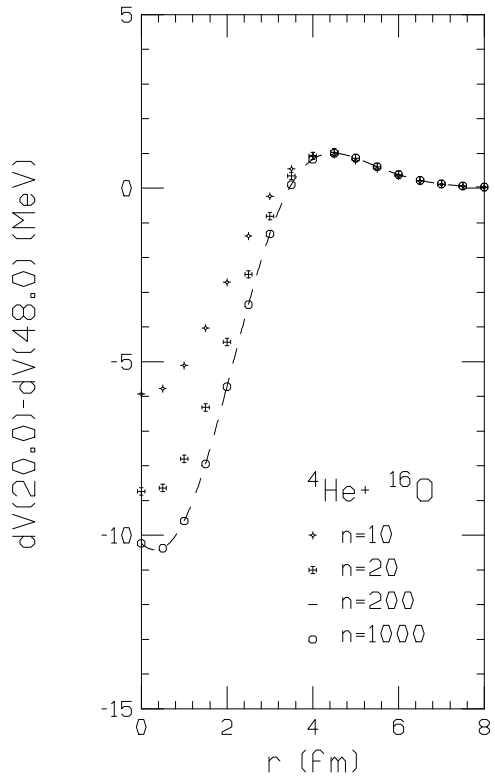

Figure 3.4: *Cálculo de* $\Delta V_{48}(r, 20)$ *con* $E_n = 200$ *MeV y n =10, 20, 200 y 1000*

del mismo. En la figura 3.4 se muestran distintos cálculos tomando $E_n = 200\ MeV$ y variando en número de segmentos con los que se parametriza W; se observa que conforme se aumenta el número de segmentos el cálculo va convergiendo, de tal forma que para $n = 200$ y $n = 1000$ no hay diferencia en el cálculo. Esto significa que tomar una segmentación tal que por cada MeV se tenga un segmento recto, nos asegurará la convergencia del cálculo.

En base a estas pruebas se calcularon $\Delta V_{E_r}(r, E)$ para las energías de 20, 60, 80, 100 y 120 MeV tomando $E_n = 200\ MeV$ y $n = 200$, obteniendo lo mostrado en 3.5, que para $r > 2\ fm$ coincide con lo calculado por Mahaux y colaboradores (ver figura 3.6). Para $r < 2\ fm$ Mahaux, en la mayoría de los cálculos, muestra un comportamiento casi

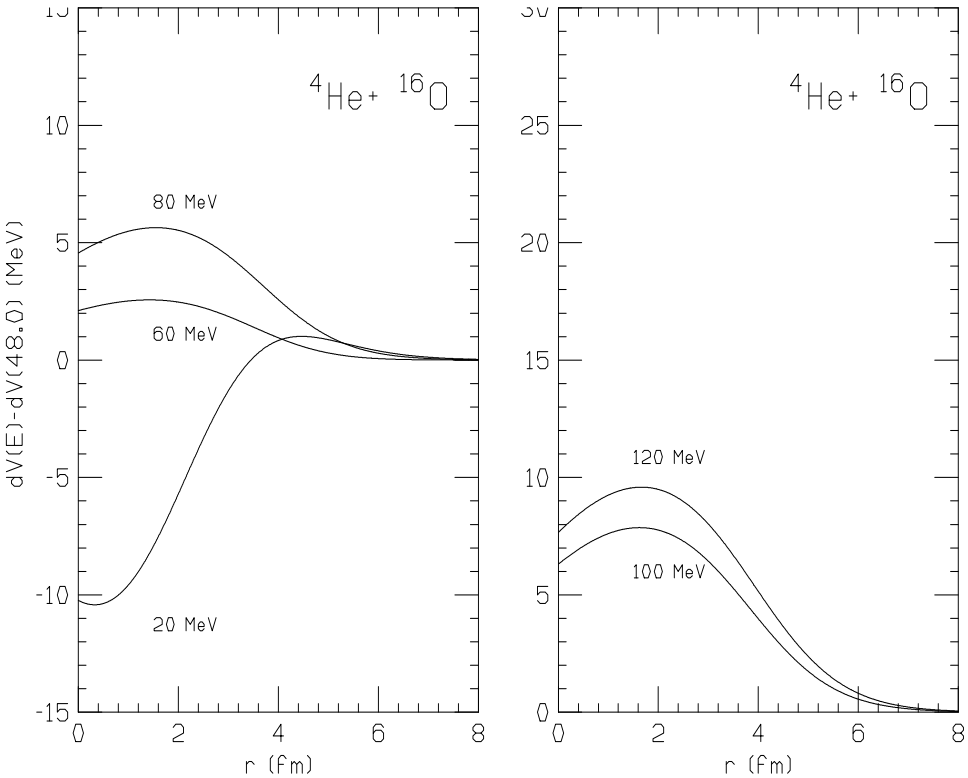

Figure 3.5: *Cálculo de* $\Delta V_{48}(r, E)$ *con* $E_n = 200$ MeV *y* $n = 200$ *para las energías 20, 60, 80, 100 y 120* MeV.

constante, en contraste con la disminución de $|\Delta V_{E_r}(r, E)|$ mostrada en 3.5. La discrepancia se la atribuímos al valor de E_n que tomaron (el cual ignoramos) y a que su parametrización de W fue sólo con 3 segmentos.

Tomando en cuenta las pruebas llevadas a cabo, en la que los cálculos convergieron para E_n 10 veces mayor a la energía donde se hizo el cálculo y $n = 1$ por MeV, se tomaron los valores de $E_n \leq 15E_G$, donde E_G es la energía mayor para la que se quiere calcular $\Delta V_{E_r}(r, E)$, y $n = 3$ segmentos por cada MeV para realizar los cálculos de este trabajo.

Figure 3.6: *Cálculo de* $\Delta V_{48}(r, E)$ *con* $n = 3$ *para las energías 20, 60, 80, 100 y 120* MeV *reportado en [MA86b].*

3.3 Selección de los potenciales

Experimentos de dispersión elástica se han llevado a cabo para diferentes sistemas de iones pesados. En algunos casos sólo se tienen medidas para unas cuantas energías, en otros las medidas llegan sólo a ángulos en donde todavía no se pueden observar los efectos refractivos y remover las ambigüedades discretas en los potenciales reales, pero en otros como $^{12}C +^{12} C$, $^{16}O +^{12} C$ y $^{16}O +^{16} O$ no sólo se tienen medidas a varias energías, sino también se han observado los efectos refractivos.

El análisis en estos sistemas se ha realizado utilizando tanto potenciales fenomenológicos como de doble convolución, pero en ambos casos se ha llegado a la conclusión de que los potenciales reales deben ser profundos

(centenas de MeV al centro), mientras que los potenciales imaginarios son poco profundos (decenas de MeV al centro).

En el análisis fenomenológico, en que tanto el potencial imaginario como el real tienen forma de WS, WS^2 o derivada de WS, se ha observado que los parámetros (3 o 6) que determinan su forma, tienen una dependencia suave con la energía; esto facilita la parametrización de W ya que mientras se pueda dar una parametrización para cada uno de los parámetros, se estará dando una parametrización del potencial $W(r, E)$. Es importante que para un mismo sistema, el análisis se haga con potenciales de la misma forma para poder dar un comportamiento general; esto no sucede con los datos publicados para el sistema $^{16}O +^{16} O$, donde dependiendo del autor es la forma escogida para el potencial imaginario.

El potencial real de referencia $V(r, E_r)$ debe estar bien determinado, por lo que se prefiere aquel en cuya energía sean más claros los efectos refractivos; pero también se debe considerar el intervalo de energías en el que se calcula ΔV_{E_r}, tomando el potencial en una energía intermedia, esperando así mejorar las predicciones de los potenciales reales de la energía más alta y más baja. Se prefiere tomar como referencia algún buen potencial de doble convolución porque su forma radial no está restringida como en el caso de los potenciales fenomenológicos y porque su cálculo se basa en primeros principios.

3.4 Ptolemy

[2] La ecuación de Schrödinger que describe la dispersión es:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r, E)\right]\chi(\mathbf{r}) = E\chi(\mathbf{r})$$

donde μ es la masa reducida, E es la energía cinética y V la suma del

[2] El material de este capítulo se elaboró con las referencias [BR97, BR85, SE72, SA80a, MA78], además de las incluídas en él.

potencial coulombiano y nuclear. Como se supone que ambos son centrales se tiene que el momento angular es constante, entonces la función de onda para un momento angular l puede darse como el producto de un término radial y uno angular, es decir:

$$\chi_{lm}(\mathbf{r}) = u_l(r) Y_l^m(\theta, \phi) \tag{3.6}$$

y con el cambio de variable $w_l(r) = r u_l(r)$ se obtiene la ecuación radial:

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2 w_l}{dr^2} + \left[V(r,E) + \frac{-\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2}\right] w_l = E w_l \tag{3.7}$$

Por otro lado, queremos que la solución a la ecuación de Schrödinger 3.6 tenga un comportamiento asintótico:

$$\chi(\mathbf{r}) = \exp(\imath \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + f(\theta)\frac{\exp(\imath k r)}{r} \tag{3.8}$$

con $\mathbf{k} = \frac{P}{\hbar}\hat{\mathrm{k}}$, donde $P = \mu v$, μ la masa reducida y v la velocidad relativa. Fisicamente 3.8 representa una onda plana $exp(\imath k z)$ de amplitud 1 y una onda esférica divergente de amplitud $f(\theta)$.

Sabemos entonces que:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \tag{3.9}$$

La amplitud de dispersión $f(\theta)$ siempre puede ser descompuesta, usando la expansión de ondas parciales como:

$$f(\theta) = (2\imath k)^{-1} \sum_l (2l+1) P_l(\cos\theta)(S_l - 1) \tag{3.10}$$

donde $S_l(E)$ son las amplitudes de la onda parcial en el caso de dispersión elástica.

Se reescribe la función de Legendre $P_l(cos\theta)$ como una suma de ondas viajando en direcciones opuestas alrededor del centro dispersivo, es decir:

$$P_l(\cos\theta) = \tilde{\mathrm{Q}}_l^+(\cos\theta) + \tilde{\mathrm{Q}}_l^-(\cos\theta)$$

donde:

$$\tilde{Q}_l^{\pm}(\cos\theta) = \frac{1}{2}[P_l(\cos\theta) \mp \frac{\imath 2}{\pi} Q_l(\cos\theta)]$$

y Q_l es la función de Legendre de segundo clase. Para l grandes, $\tilde{Q}_l^{\pm}$ se comporta como las ondas viajeras $exp(\pm\imath(l+\frac{1}{2})\theta)$ entonces, términos $Q_l^{\pm}$ representan ondas provinientes de lados opuestos del centro dispersivo, por lo que se puede escribir:

$$f(\theta) = F_N(\theta) + F_F(\theta)$$

donde:

$$F_{\frac{N}{F}}(\theta) = (2\imath k)^{-1} \sum (2l+1)(S_l - 1)\tilde{Q}_l^{\pm}(\cos\theta)$$

obteniendo así expresiones para los términos NEAR y FAR de los que se habló en el capítulo 2.

Volviendo a la ecuación 3.9, es conveniente separar la contribución coulombiana debido a su fuerte interacción entre iones pesados, de aquí que:

$$S_l(E) = S_{nl} \exp(2\imath\sigma_l)$$

donde:

$$\sigma_l = \arg\Gamma(l+1+\imath n)$$

con Γ la función Gamma, y $n = \frac{KZ_1Z_2e^2}{2E}$.

Cuando no hay interacción nuclear $S_{nl} = 1$. La amplitud de dispersión $f(\theta)$ puede separarse en la parte coulombiana y en la parte nuclear de la siguiente manera:

$$f(\theta) = f_c(\theta) + (2\imath k)^{-1} \sum (2l+1) P_l(\cos\theta) \exp(2\imath\sigma_l)(S_{nl} - 1)$$

donde $f_c(\theta)$ está dada como:

$$f_c(\theta) = \frac{-n}{2k\sin^2(\frac{1}{2}\theta)} \exp[-\imath n \ln(\sin^2(\frac{1}{2}\theta)) + 2\imath\sigma_o]$$

La amplitud de la onda parcial nuclear está relacionada con el cambio de fase nuclear δ_{nl} por la ecuación:

$$S_{nl} = \exp(2\imath\delta_{nl})$$

El cambio de fase nuclear δ_{nl} está determinado por la forma asintótica (para r grandes) de la función radial de onda w_l, solución de la ecuación 3.7:

$$w_l(r) \sim \sin(kr - \frac{1}{2}l\pi + n\ln 2kr + \sigma_l + \delta_{nl}).$$

El programa de cómputo Ptolemy [MA78] resuelve numéricamente la ecuación radial de Schrödinger (3.7) para w_l, para luego hacer coincidir la solución numérica con la función de onda coulombiana f_c en algún r_o fuera del alcance del potencial óptico nuclear; luego extrae el cambio de fase comparando con la función asintótica de w_l, determinando así $f(\theta)$ y calculando posteriormente la sección eficaz diferencial.

En este trabajo, Ptolemy se utilizó con 2 fines:

1.- Calcular distribuciones angulares con los potenciales reales obtenidos con la relación de dispersión y los imaginarios correspondientes, y comparar con los datos. Para esto se necesitó los valores del potencial óptico punto a punto o una parametrización del mismo.

2.- Obtener los valores óptimos de los parámetros del potencial, real e imaginario, para describir la distribución angular en el conjunto de energías del sistema $^{16}O - ^{16}O$. Para esto se necesitan los valores de la distribución angular medida. En este caso Ptolemy calcula la sección eficaz diferencial para un potencial inicial dado, luego calcula:

$$\chi^2 = \frac{1}{N_\sigma} \sum_{i=1}^{N_\sigma} \frac{(\sigma_{teo} - \sigma_{exp})^2}{(\Delta\sigma_{exp})^2}$$

donde σ_{teo}, σ_{exp} y $\Delta\sigma_{exp}$ son las secciones eficaces diferenciales teóricas, experimentales y el error experimental, respectivamente y N_σ es el total de número de ángulos para los que se tiene medidas. χ^2 es una medida de la calidad de la predicción de la sección eficaz diferencial calculada comparada con los datos experimentales. Ptolemy es capaz de variar el valor del potencial óptico bajo una regla introducida por el usuario, para mejorar el valor de χ^2 y, por ende, la calidad del acuerdo entre la predicción de la sección eficaz diferencial y los datos experimentales.

Capítulo 4

Sistema $^{12}C + ^{12}C$

El sistema $^{12}C + ^{12}C$ es el sistema de iones pesados en el que se tienen medidas de dispersión elástica para un mayor número de energías, que van desde pocos MeV hasta miles de MeV. Los análisis más recientes de las distribuciones angulares, tanto con potenciales fenomenológicos como con potenciales de doble convolución, ha mostrado que este sistema es poco absorbente, pues los potenciales imaginarios han resultados poco profundos ($\approx 25MeV$), mientras que los reales son profundos ($\approx 250MeV$), permitiendo ver efectos refractivos por encima de 10 MeV por nucleón [BR97].

En el análisis con potenciales imaginarios y reales con forma de WS,

$$f(r,E) = \frac{-f_o}{1 + exp(\frac{r-R_f}{a_f})}$$

donde $R_f = r_{of}(A_b^{\frac{1}{3}} + A_p^{\frac{1}{3}})$ se han obtenido valores para los parámetros del potencial imaginario que se muestran en círculos en la figura 4.1 [BR90, BR88b] y potenciales reales como los que se muestran en la figura 4.2. Se observa que los parámetros del potencial imaginario dependen de la energía y que W_o tiende a un valor constante con el aumento de la energía. Los potenciales reales tienden a ser menos atractivos conforme aumenta la energía.

Algunas descripciones de las distribuciones angulares con estos potenciales fenomenológicos se muestran en la figura 4.3 con los datos a las

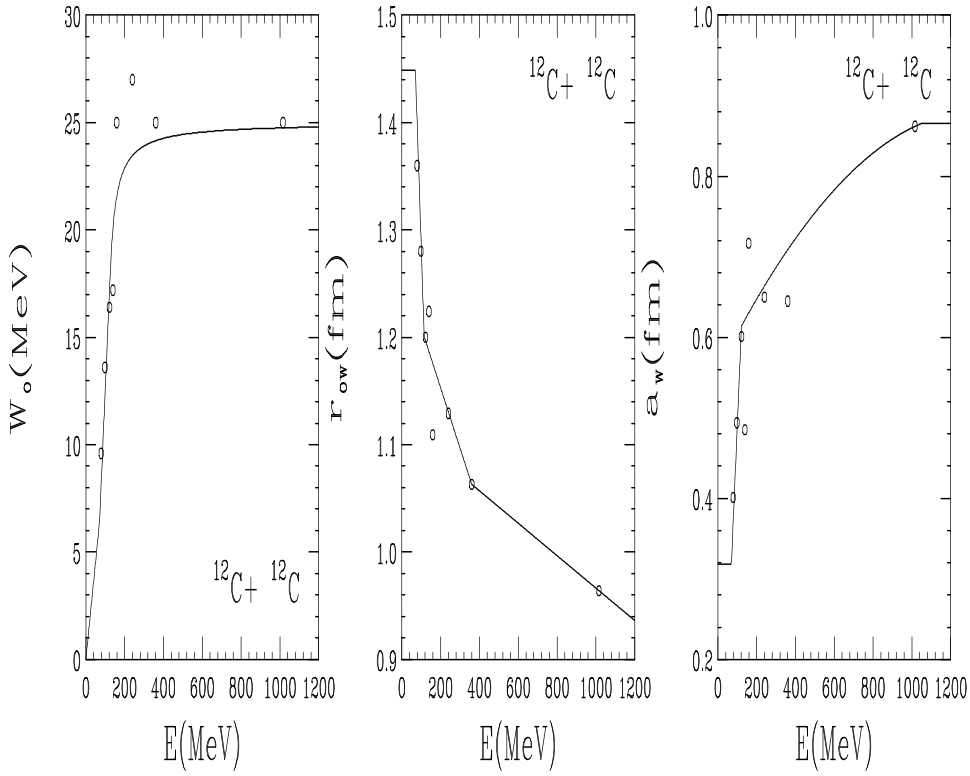

Figure 4.1: *Los círculos representan los valores de los parámetros del potencial imaginario, mientras que las líneas sólidas son parametrizaciones que describen su dependencia promedio con la energía.*

energías 158.8 MeV [KU83], 360 MeV [BU84] y 1016 MeV [BU82], donde se observa que efectivemente describen muy bien las distribuciones angulares.

Se tienen determinados los potenciales imaginarios fenomenológicos para más de 15 energías diferentes, cuyos parámetros dependen regularmente de la energía; también se ha resuelto la ambigüedad discreta en los potenciales reales debido a que se pudo observar en este sistema los efectos refractivos [BR88b, BR90] y los buenos ajustes a las distribuciones angulares con estos potenciales nos dan confianza en ellos. Por estas razones, este sistema resulta idóneo para nuestro estudio.

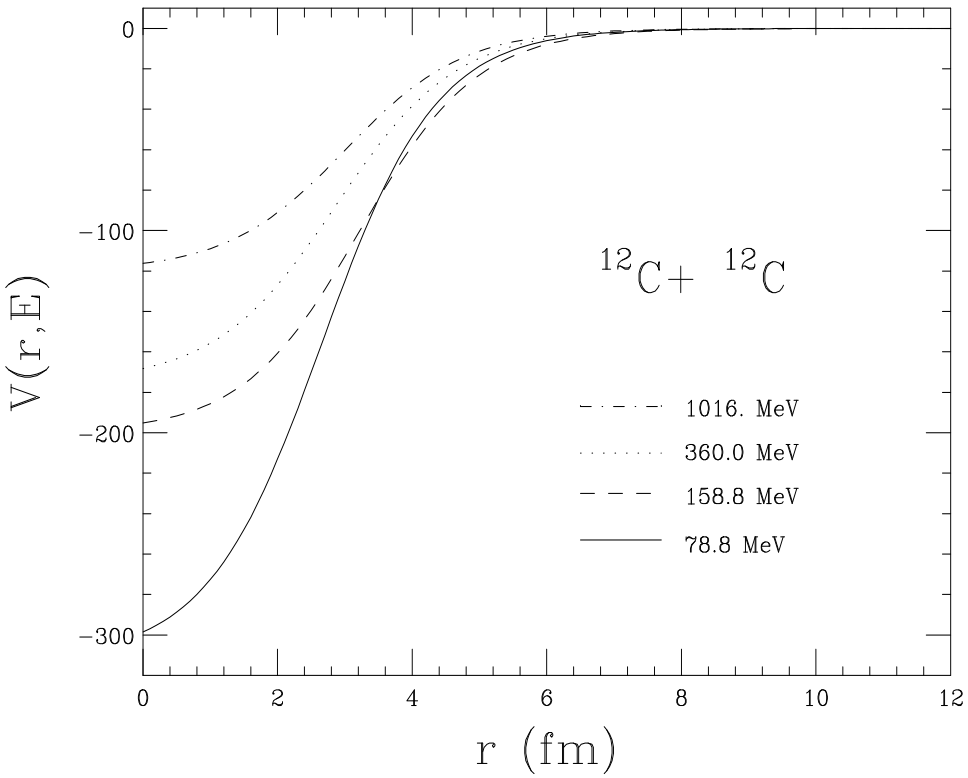

Figure 4.2: *Potenciales reales fenomenológicos con forma de WS para las energías 78.8, 158.8, 360. y 1016 MeV.*

4.1 Consideraciones.

Para poder calcular los potenciales reales en el intervalo entre 70 y 1016 MeV, aplicando la relación de dispersión (3.2, 3.3) se necesita:

1) Un potencial real de referencia a una energía que sea un valor intermedio entre 70 y 1016 MeV. Las energías que cumplían mejor este requisito fueron 300 y 360 MeV, pero se decidió por 300 MeV porque Khoa y colaboradores [KH94] han propuesto un potencial de doble convolución calculado a partir de la interacción efectiva BDM3Y1 a esta energía. Su método ha sido muy exitoso en la descripción de éste y otros sistemas de iones pesados ligeros. El potencial de referencia tiene ≈ 215 MeV de profundidad en $r = 0$.

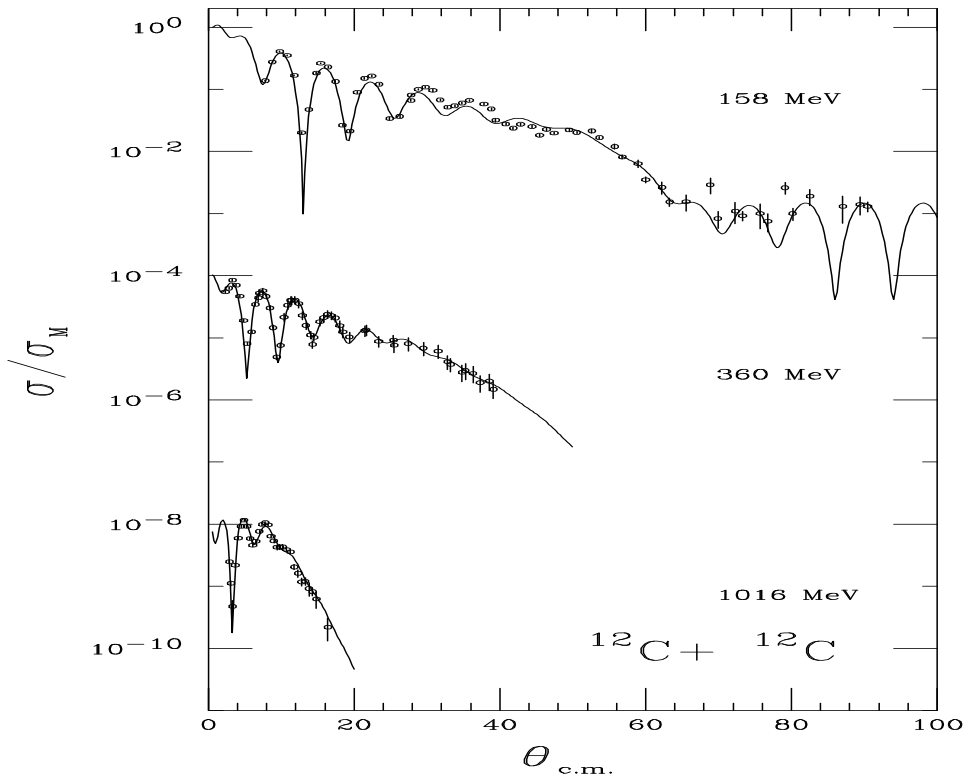

Figure 4.3: *Se muestran en línea sólida las descripciones de las distribuciones angulares por los potenciales fenomenológicos y con símbolos los datos experimentales.*

2) Una parametrización de $W(r, E)$ dependiente de r y E, para lo cual se tomaron las siguientes consideraciones para parametrizar W_o, r_{ow}, a_w:

a) Para energías menores a 120 MeV, se tomaron las ecuaciones dadas en la referencia [BR90]:

$W_o = 0.091\ E\ \ MeV \qquad E \leq 70MeV$
$r_{ow} = 1.449\ \ fm$
$a_w = 0.318\ \ fm$

$W_o = -8.19 + 0.208\ E\ \ MeV \qquad 70 \leq E \leq 120MeV$

$r_{ow} = 1.833 - 0.0055\ E\ \ fm$
$a_w = -0.79 + 0.0057\ E\ \ fm$

b) Para energías entre 120 y 1016 MeV se tomaron los valores :

$W_o = 25 - \frac{224.6941}{E-93.8327}\ \ MeV$
$r_{ow} = 1.2650 - 0.000561\ E\ \ fm \qquad E \leq 360 MeV$
$r_{ow} = 1.1173 - 0.000151\ E\ \ fm \qquad 360 \leq E$
$a_w = \frac{(E-600)(E-1016)}{696738.36} + \frac{(E-121.6)(E-1016)}{-254169.09} + \frac{(E-121.6)(E-600)}{431636.19} \quad E \leq 1050 MeV$

c) Para energías mayores que 1016 MeV se supuso una dependencia débil con la energía de W_o, haciendo que su valor tendiera a 25 MeV con el aumento de la energía; para r_{ow} se extrapoló la parametrización dada en b) hasta llegar a $r_{ow} = 0$ para luego tomar el valor constante 0; y para a_w un valor constante 0.865 fm.

En la figura 4.1 se muestran las parametrizaciones anteriores y en la figura 4.4 los potenciales correspondientes. Para probar la consistencia de los potenciales imaginarios obtenidos de las parametrizaciones de W_o, r_{ow} y a_o, se calculó sus integrales de volumen J_w, que se muestran en línea sólida en la figura 4.5c, y se compararon con las integrales de volumen de los potenciales imaginarios fenomenológicos, que se muestran en la misma figura con círculos. Se observa que las integrales de volumen de los potenciales imaginarios parametrizados y las integrales de volumen de los potenciales imaginarios fenomenológicos tienen valores similares y la misma dependencia con la energía. Esto da confianza en la parametrización de $W(r, E)$ propuesta.

Teniendo el potencial de referencia $V(r, 300)$ y los potenciales imaginarios parametrizados, se calcularon las contribuciones dispersivas ΔV_{E_r} y los potenciales reales, de acuerdo con la ecuación 3.3.

4.2 Resultados y Discusión

Considerando la ecuación 3.5 con la parametrización de $W(r, E)$ dada en la sección 4.1, y tomando los valores $n = 3$ segmentos por MeV

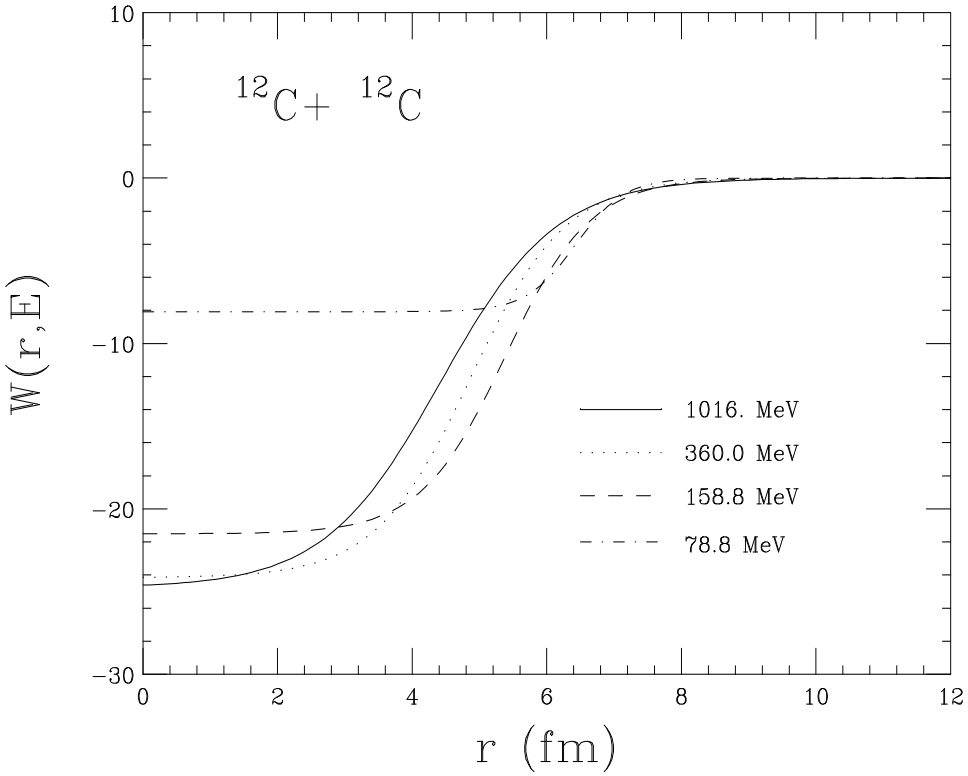

Figure 4.4: *Potencial imaginario calculado a partir de las parametrizaciones propuestas de los parámetros.*

y $E_n = 15000\ MeV$, según el análisis explicado en la sección 3.2, se calcularon las contribuciones dispersivas sustraídas $\Delta V_{E_r}(r,E) = \Delta V(r,E) - \Delta V(r,300)$, que se muestran en la figura 4.5a. Se observa que la contribución dispersiva sustraída es atractiva para energías menores a la de referencia, disminuyendo su profundidad conforme la energía aumenta hasta llegar a cero para la energía de referencia y comenzar a ser repulsiva con el aumento de la energía; esto significa que debe esperarse que los potenciales que se calcularán sean cada vez menos atractivos conforme la energía aumenta, lo que es consistente con lo observado en los potenciales reales fenomenológicos (ver figura 4.2). También se observa que la contribución dispersiva sustraída no es una función monotónica, pues presenta ligeros "chipotes" entre 2 y 5

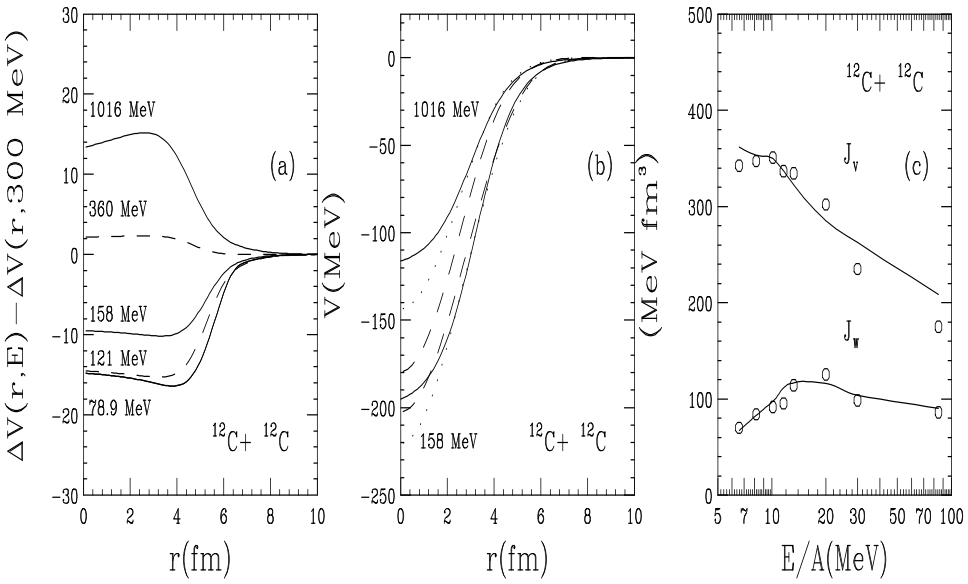

Figure 4.5: *(a) Contribución dispersiva sustraída para la parte real de el potencial, en MeV. (b) Los potenciales reales calculados a dos energías: las 3 curvas inferiores corresponden a 158.8MeV y las 3 restantes a 1016 MeV. Las líneas sólidas son los potenciales reales fenomenológicos, las segmentadas son los potenciales reales calculados con la relación de dispersión, y las punteadas son los potenciales reales normalizados que optimizan el ajuste de las distribuciones angulares. (c) Integrales de volumen para los potenciales fenomenológicos (círculos) y para los potenciales reales calculados y las parametrizaciones del imaginario (líneas solidas)*

fm que se van introduciendo en el sistema (es decir se acercan a r=0) conforme aumenta la energía . Esto se interpreta como consecuencia del comportamiento decreciente de $r_w(E)$, mostrado en la figura 4.1b.

Tomando la ecuación 3.3, el potencial de referencia a $E_r = 300\ MeV$ y los cálculos para la contribución dispersiva, se calcularon los potenciales reales para las energías de 158 y 1016 MeV que se muestran en línea segmentada en la figura 4.5b; en la misma figura se muestran los potenciales reales fenomenológicos para las mismas energías. Comparando los potenciales reales calculados con los potenciales fenomenológicos, se puede observar que la mayor discrepancia entre ellos es a $r \leq 2\ fm$ en

contraste con un buen acuerdo a $r \geq 6\ fm$.

Si se considera la contribución dispersiva sustraída para $E = 1016\ MeV$ y el potencial real calculado, se verá que a $r = 2\ fm$ se tiene $\Delta V_{E_r} \approx 15\ MeV$ y $V \approx 170\ MeV$, lo que significa que ΔV_{E_r} representa un 9% del valor de V; ahora véase a $r = 4\ fm$, donde $\Delta V_{E_r} \approx 12\ MeV$ y $V \approx 35\ MeV$, es decir ahora ΔV_{E_r} representa un 34% del valor de V; por último a $r = 7\ fm$, se tiene $\Delta V_{E_r} \approx 0\ MeV$. Lo anterior hace pensar que la contribución dispersiva sustraída es más significante en la superficie ($r \approx 5.5\ fm$) y en la "subficie" ($2.5\ fm\ < r < 5.5\ fm$) del sistema.

Tratando de analizar (en primer orden) la magnitud de los potenciales reales calculados, se obtuvieron sus integrales de volumen J_v, que se muestran en la figura 4.5c en línea sólida y se compararon con las integrales de volumen de los potenciales fenomenológicos, que se muestran en la misma figura con círculos. El valor de la integral de volumen real requerido por los datos (ajuste fenomenológico) y para una energía de 1016 MeV es de $\approx 175\ MeV\ fm^3$, mientras que el valor obtenido a partir de la relación de dispersión es de $\approx 210\ MeV\ fm^3$ es decir, una discrepancia del 17%; en el caso de una energía de 360 MeV se tiene el valor obtenido a partir de la relación de dispersión de $\approx 260\ MeV\ fm^3$ y el requerido por los datos de $\approx 230\ MeV\ fm^3$, lo que implica una discrepancia del 12%; de aquí que se piense que la dependencia con la energía de las integrales de volumen es un 15% más débil que la requerida por los datos para el potencial dentro de un intervalo que cubre $\approx 90\ MeV$ por nucleón.

El siguiente paso fue obtener la distribución angular con los potenciales reales calculados. En la figura 4.6 se muestran las distribuciones angulares obtenidas usando los potenciales reales calculados y los potenciales imaginarios parametrizados. Como se observa, las predicciones dan una descripción correcta de las distribuciones angulares para ángulos menores a 26° para la energía de 159 MeV, y de 5° para 1016 MeV; es decir describe correctamente las oscilaciones de Fraunhofer. Sin embargo para ángulos mayores a los anteriores sólo se describe la estructura general de la distribución.

Volviendo a la visión semiclásica, se recuerda que las oscilaciones de Fraunhofer son el resultado de la interferencia de trayectorias con parámetro de impacto grande, tal que son afectadas principalmente por la interacción Coulombiana y los primeros efectos significativos de la interacción nuclear (es decir sienten "la cola" del potencial real nuclear). Los potenciales reales calculados, son similares a los fenomenológicos para $r > 6\ fm$ como se observó anteriormente, lo que explica la correcta descripción en las oscilaciones de Fraunhofer. Sin embargo, para describir los efectos refractivos, es decir la distribución angular a ángulos mayores que 26° o 5° para las energías de 158 y 1016 MeV, respectivamente, hace falta que el potencial real esté perfectamente determinado en la superficie y en la "subficie" del sistema, donde la interacción nuclear es la predominante, pero es justo ahí donde los potenciales reales calculados comienzan a diferir de los fenomenológicos. Por esto sólo es posible hacer una descripción cualitativa de las distribuciones angulares a estos ángulos.

Ahora la pregunta es ¿cuánto tendrían que variar los potenciales reales calculados para mejorar su descripción de las distribuciones angulares?. Para dar una respuesta simple a esto, se permitió normalizar los potenciales reales calculados, esto se hizo con ayuda del programa de computo Ptolemy, el cual encontaba el valor óptimo para el factor de normalización tal que el potencial normalizado mejorara el ajuste de las distribuciones angulares. Obteniendo con potenciales normalizados por un factor de 1.08 y 0.8 para $E = 158.8\ MeV$ y $E = 1016\ MeV$, respectivamente, las distribuciones angulares que se muestran en la figura 4.6 en líneas segmentadas (tomando en el cálculo de las distribuciones angulares los potenciales imaginarios parametrizados, aunque el cálculo no difiere significativamente si se toman los potenciales imaginarios fenomenológicos). Claramente se observa que la descripción de las distribuciones angulares con los potenciales reales calculados normalizados mejoró.

Haciendo un análisis para determinar el mínimo anterior al ángulo de arcoiris (cap. 2.4) en los datos, se determinó que el primer mínimo anterior al ángulo de arcoiris está en $\approx 69^o$ para $E = 158$ (ver figura 4.7). Con este mismo tipo de análisis se observa que normalizar el potencial

real calculado acercó el primer mínimo anterior al ángulo de arcoiris a la posición en donde lo requerian los datos, llevándolo de $\approx 62^o$ a $\approx 68^o$. Este estudio no se efectuó para $E = 1016\ MeV$ debido a que el primer mínimo anterior al ángulo de arcoiris a esta energía se encuentra alrededor de cero grados. Además, si se permite la normalización, se tiene un acuerdo mejor entre los potenciales reales fenomenológicos y los calculados a $r \leq 6\ fm$, como se observa en la figura 4.5b, donde la línea punteada representa los potenciales reales calculados normalizados. Y por último, las integrales de volumen de los potenciales reales calculados mejoran, en el sentido que concuerdan mejor con las integrales de volumen de los potenciales reales fenomenológicos.

4.3 Conclusiones.

La aplicación de la relación de dispersión a los potenciales imaginarios, en el sistema $^{12}C - ^{12}C$ permite evaluar la contribución dispersiva dependiente de la energía y el radio. Así es posible calcular potenciales reales como función de la energía y el radio. Estos difieren de los fenomenológicos principalmenente en su profundidad al centro, siendo más profundos, y disminuye su discrepancia con los fenomenológicos conforme aumenta el radio.

Estos potenciales reales calculados describen la dependencia con la energía de las integrales de volumen un 15% más débil de la requerida por los datos en el intervalo de 30 a 90 MeV por nucleón, y las distribuciones angulares predichas describen los datos cualitativa y cuantitativamente a ángulos donde aparecen las oscilaciones de Fraunhofer, mientras que los efectos refractivos sólo son descritos cualitativamente. Los potenciales calculados colocan el primer mínimo anterior al ángulo de arcoiris con unos cuantos grados de diferencia de la posición requerida por los datos, por lo que se deduce que predicen correctamente la evolución con la energía del primer mínimo anterior al ángulo de arcoiris.

Si se permite una normalización de hasta un 20% en los potenciales

reales calculados se mejora su acuerdo con los potenciales reales fenomenológicos, con sus integrales de volumen y con las distribuciones angulares predichas por ellos, es decir que los potenciales reales son calculados dentro de un 20% global de diferencia con los valores que los datos requieren en el intervalo de energías de 10 y 90 MeV por nucleón.

La dependencia con la energía de los potenciales reales predicha con las contribuciones dispersivas es mayor en la superficie y "subficie" del sistema, donde representa hasta un 35% del valor del potencial real calculado, lo que podría significar una sensibilidad de la relación de dispersión a la información contenida en esta zona. Por esto se decidió estudiar a continuación el sistema $^{16}O -^{16} O$, donde es necesario un término de superficie en el potencial nuclear imaginario para la descripción de los datos, lo que nos hace suponer que la zona superficial de $W(r, E)$ está mejor determinada que para $^{12}C -^{12} C$.

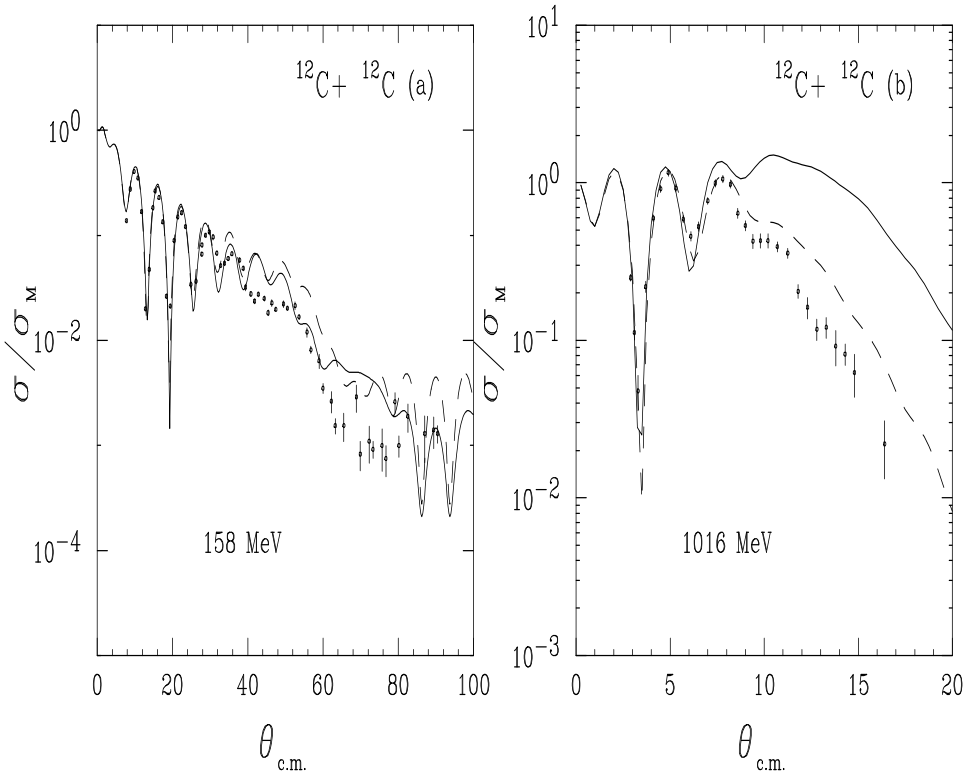

Figure 4.6: *Datos de la dispersión elástica dividida por la sección eficaz Mott. Las líneas sólidas son los cálculos de la distribución angular utilizando los potenciales reales calculados con la relación de dispersión y las parametrizaciones del potencial imaginario. a) Los círculos son datos a 158.8 MeV obtenidos de la referencia [KU83]. La curva segmentada es la predicción con potenciales reales calculados normalizados por 1.08. b) Los círculos son datos a 1016 MeV obtenidos de la referencia [BU82]. La curva segmentada es la predicción con potenciales reales calculados normalizados por un factor de 0.80.*

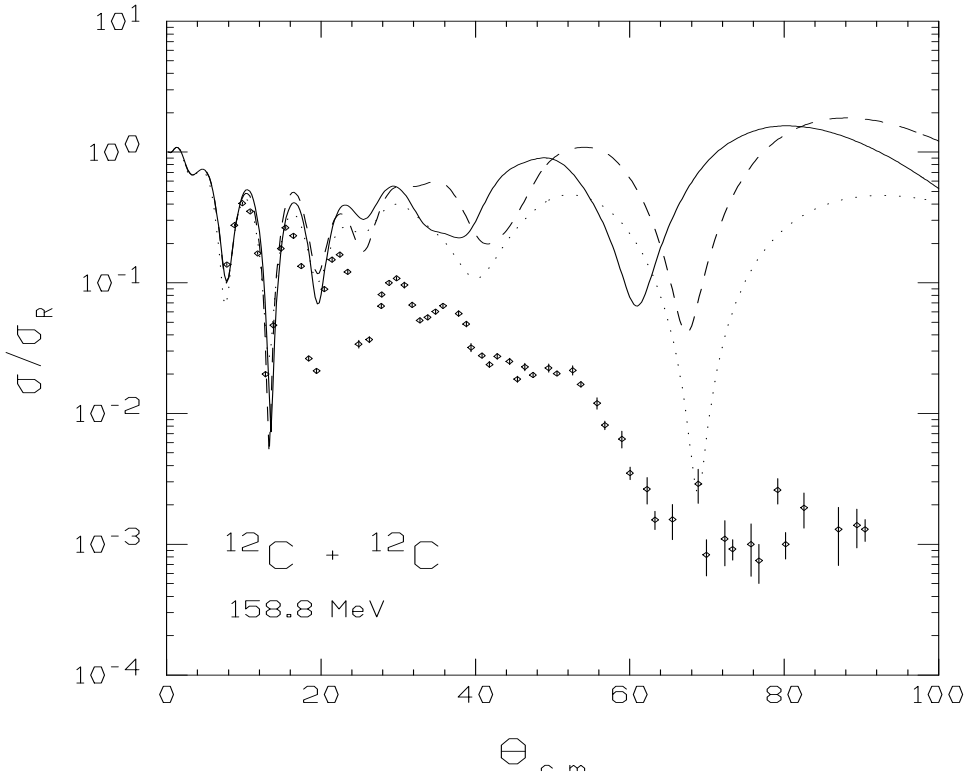

Figure 4.7: *Cálculo de las distribuciones angulares, en línea sólida tomando en cuenta el potencial real calculado con la relación de dispersión, en línea segmentada, tomando en cuenta el potencial real calculado con una normalización de 1.08 y en ambos casos, el 50% del valor de la profundidad del potencial imaginario parametrizado. En línea punteada, el cálculo de la distribución angular tomando el potencial real fenomenológico y el 50% del valor de la profundidad del potencial imaginario fenomenológico. En símbolos son datos a la energía* $E = 158.8$ *MeV [KU83]. En los cálculos no se incluye la simetrización respecto de* 90°.

Capítulo 5

Sistema $^{16}O +^{16} O$

El sistema $^{16}O +^{16} O$ es otro de los sistemas cuyo potencial óptico ha mostrado ser poco absorbente, y donde los efectos refractivos en las distribuciones angulares son más claros y evidentes. El análisis de las distribuciones angulares ha requerido un término de derivada de Woods-Saxon en el potencial imaginario, localizado en la superficie del sistema, dando así más libertad a la forma del potencial imaginario.

La aplicación de la relación de dispersión a los potenciales imaginarios del sistema $^{12}C +^{12} C$ llevó a pensar que la contribución dispersiva sustraída más importante se daba en la "subficie" y superficie del sistema, lo que se puede interpretar como una sensibilidad de la relación de dispersión a la información en esta región. Por esto, la aparición del término de derivada de WS en el análisis del sistema $^{16}O +^{16} O$ lo convierte en un sistema adecuado para continuar el estudio.

En este sistema se cuenta con medidas de distribuciones angulares para las energías de 124 [KO96], 145 [SU93, KO96], 250 [KH94], 350 [ST89, ST90], 480 [KH95b] y 704 MeV [BA96b].

5.1 Singularidades del sistema

El caso más espectacular que ejemplifica los efectos refractivos en un sistema de iones pesados es a 350 MeV en el sistema $^{16}O +^{16} O$, mostrado

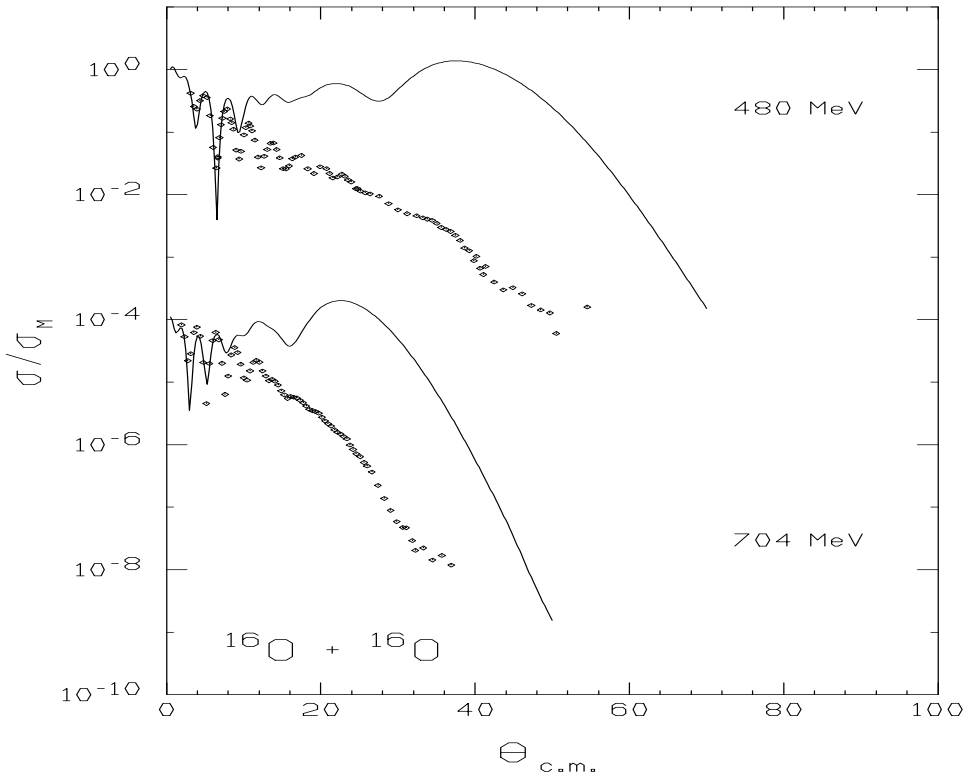

Figure 5.1: *Cálculo de las distribuciones angulares tomando en cuenta el potencial real dado por D1 (vease texto de seccion 5.2) y el 50% del valor de la profundidad del potencial imaginario dado por D1. Los símbolos son los datos a las energías* $E = 480$ *MeV [KH95b] y* $E = 704$ *MeV [BA96b].*

en la figura 1.9. Un análisis para determinar la posición del mínimo anterior al ángulo de arcoiris (llevado a cabo en la sección 2.4) mostró que se encuentra en $\theta \approx 44^o$; sin embargo si uno se fija bien, existe una pequeña concavidad en la distribución angular situada a $\theta \approx 60^o$ que no es un mínimo refractivo. Para demostrarlo, obsérvese la figura 1.11 donde resulta claro que la concavidad a $\theta \approx 60^o$ desaparece al eliminar el término de derivada (W_d) en la absorción, quedando como el primer mínimo anterior al arcoiris la estructura a $\theta \approx 44^o$.

La presencia de estas concavidades en las distribuciones angulares que no son primeros mínimos anteriores al ángulo de arcoiris, se tiene

también en las energías de 350, 480 y 704 MeV. Haciendo el mismo análisis que para $E = 350\ MeV$, observamos que el término de derivada de WS ajusta las concavidades en $\theta \approx 44^o$ para $E = 480\ MeV$ y en $\theta \approx 32^o$ para $E = 704\ MeV$ (ver figura 5.1), mientras que los mínimos anteriores al arcoiris nuclear se encuentra en $\theta \approx 28^o$ y $\theta \approx 16^o$ para $E = 480\ MeV$ y $E = 704\ MeV$, respectivamente.

Este término de derivada de WS se centra en la superficie del sistema, por lo que se le suele llamar "término de superficie" y esencialmente lo que hace es aumentar la absorción del sistema en su superficie.

Hasta ahora no se ha mencionado la forma detallada del término de superficie, esto es porque en realidad en la bibliografía no se tiene un concenso; por ejemplo, ajustes hechos en la referencia [BA96b] incluyen un término de derivada de un WS^2 para las energías de 480 y 704 MeV, mientras que para las energías 124, 145 y 350 MeV se incluye un término de derivada de WS. En el caso del término imaginario de volumen se utilizó siempre un WS^2

Revisando los valores reportados para los parámetros del término imaginario y para su integral de volumen, se encontró que estaban mal calculadas las integrales de volumen del potencial reportado en [BA96b] para $E = 480\ MeV$. Esto dió desconfianza en los demás valores reportados y revisandolos críticamente se encontró que para $E = 704\ MeV$ se reportaba una profundidad del término imaginario de 53.6 MeV, que es más grande de lo usual.

Por estas razones, y debido que para aplicar la relación de dispersión a los potenciales imaginarios se necesita una parametrización de ellos, se decidió llevar a cabo un análisis independiente de las distribuciones angulares tomando como base el análisis realizado a $E = 350\ MeV$.

5.2 Ajuste fenomenológico

Para $E = 350\ MeV$ se tenía reportado un análisis [BR91a] utilizando un potencial optico de la forma,

$$U(r,E) = -\frac{V_o(r,E)}{\left[1+exp(\frac{r-r_v}{a_v})\right]^2} - \frac{\imath W_o(r,E)}{\left[1+exp(\frac{r-r_w}{a_w})\right]^2} - \frac{4\imath W_d(r,E)exp(\frac{r-r_d}{a_d})}{\left[1+exp(\frac{r-r_d}{a_d})\right]^2} \tag{5.1}$$

donde $V_o = 400\ MeV$, $r_v = 3.80\ fm$, $a_v = 1.60\ fm$, $W_o = 29.7\ MeV$, $r_w = 6.27\ fm$, $a_w = 1.02\ fm$, $W_d = 7.63\ MeV$, $r_d = 4.62\ fm$ y $a_d = 0.321\ fm$. Entonces $J_v = 298\ MeVfm^3$ y $J_w = 98.2\ MeVfm^3$.

Para el caso de $E = 124$ y $145\ MeV$, se tenía reportado en la bibliografía un análisis de sus distribuciones angulares [KO96] utilizando potenciales opticos de la forma:

$$U(r,E) = -\frac{V_o(r,E)}{\left[1+exp(\frac{r-r_v}{a_v})\right]^2} - \frac{\imath W_o(r,E)}{\left[1+exp(\frac{r-r_w}{a_w})\right]^2}$$

obteniendo los valores de los parámetros,

Para el potencial real:

$E_{lab}(MeV)$	$V_o\ MeV$	$r_v\ fm$	$a_v\ fm$	$J_v\ MeVfm^3$
124	413	3.97	1.53	337
145	414	3.95	1.49	329

Tabla 5.1a. Se muestran los parámetros del potencial real fenomenológico reportados en [KO96], tomado con forma de WS^2, para las energías de 124 y 145 MeV.

Para el potencial imaginario:

$E_{lab}(MeV)$	$W_o\ MeV$	$r_w\ fm$	$a_w\ fm$	$J_w\ MeV fm^3$
124	16.0	6.86	0.970	62.9
145	16.8	6.80	0.883	65.2

Tabla 5.1b. Se muestran los parámetros del potencial imaginario fenomenológico reportados en [KO96], tomándolo con forma de WS^2, para las energías de 124 y 145 MeV.

En la figura 5.2c se muestran en círculos las integrales de volumen para los potenciales reales e imaginarios fenomenológicos para las energías de 124 (7.75 MeV por nucleón), 145 (9.06 MeV por nucleón) y 350 MeV (21.9 MeV por nucleón). Comparandolas con las integrales de volumen reales e imaginarias obtenidas con potenciales fenomenológicos en el sistema $^{12}C - ^{12}C$ (ver figura 4.5), se puede ver que las integrales reales e imaginarias para 124, 145 y 350 MeV tienen la dependencia con la energía esperada (esto se puede hacer debido a que como se vió en la sección 3.2, existe una misma evolución con la energía por nucleón en las integrales de volumen); por lo que se decidió tomar los valores de los parámetros reportados en [KO96] (Tablas 5.1a y 5.1b) para las energías de 124 y 145 MeV, considerando que la profundidad del término de superficie (W_d) es nula.

Entonces, el análisis de distribuciones angulares para las energías de 250, 480 y 704 MeV se efectuó con potenciales ópticos de la forma dada por la ecuación 5.1, exigiendo que sus integrales de volumen tuvieran la dependencia con la energía mostrada por las integrales de volumen de los potenciales en las energias 124, 145 y 350 MeV.

La búsqueda de los valores de los parámetros del potencial óptico se hizo con el programa de cómputo Ptolemy [MA78] (sección 3.4), obteniendo los parámetros siguientes.

Para el potencial real:

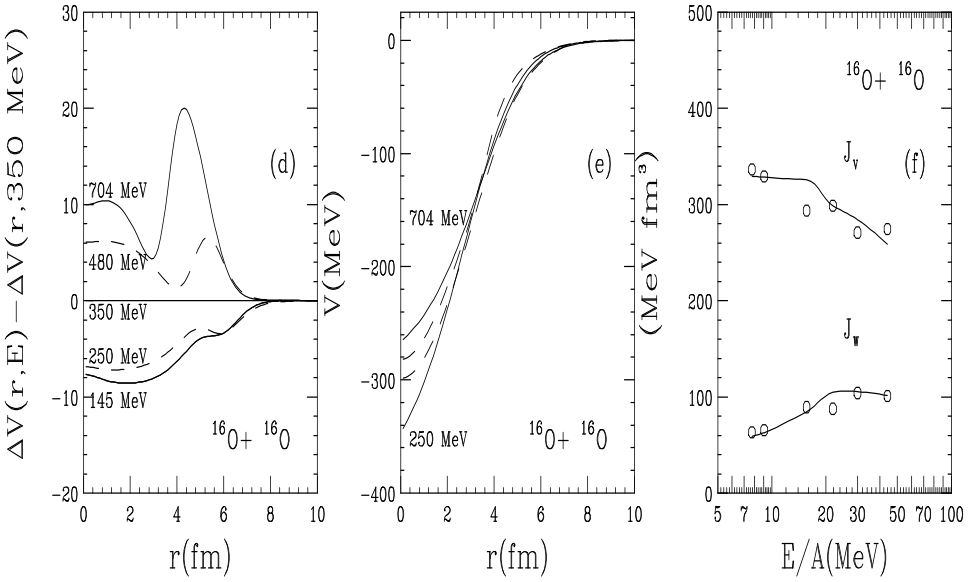

Figure 5.2: *Considerando los datos de las tablas 5.2a y 5.2b y la parametrización $P1$, (a) La contribución dispersiva sustraída para la parte real de el potencial, en MeV. (b) Los potenciales reales calculados a dos energías: las 2 inferiores corresponden a 250 MeV y las 2 restantes a 704 MeV. Las líneas sólidas son los potenciales reales fenomenológicos, las segmentadas son los potenciales reales calculados con la relación de dispersión. (c) Integrales de volumen para los potenciales fenomenológicos (círculos) y para los potenciales reales calculados y las parametrizaciones del imaginario (líneas sólidas)*

E_{lab} MeV	V_o MeV	r_v fm	a_v fm	J_v $MeV fm^3$
250	406	3.79	1.52	293
480	268	4.38	1.32	271
704	272	4.33	1.48	274

Tabla 5.2a. Parámetros del potencial real fenomenológico, tomado con forma de WS^2, para las energías de 250, 480 y 704 MeV.

Para el potencial imaginario se obtuvieron los valores siguientes:

E_{lab} MeV	W_o MeV	r_w fm	a_w fm	W_d MeV	r_d fm	a_d fm	J_w $MeVfm^3$
250	34.2	6.05	1.13	0.4	6.86	0.60	89.2
480	41.0	5.60	1.30	8.5	4.70	0.52	104.0
704	27.0	6.33	0.77	12.8	3.69	0.43	100.9

Tabla 5.2b. Parámetros del potencial imaginario fenomenológico, tomado como suma de un término de volumen con forma de WS^2 y un término de superficie con forma de derivada de WS, para las energías de 250, 480 y 704 MeV.

A lo largo de este trabajo surgió la duda de si las contribuciones dispersivas sustraídas calculadas con la aplicación de la relación de dispersión a potenciales imaginarios, dependían fuertemente de la parametrización del potencial imaginario. Para resolver esto se buscaron valores de los parámetros del potencial imaginario que permitieran proponer una parametrización alternativa del potencial imaginario.

El resultado de esta segunda búsqueda fueron los potenciales determinados por los parámetros mostrados en las siguientes tablas.

Para el potencial real:

E_{lab} MeV	V_o MeV	r_v fm	a_v fm	J_v $MeVfm^3$
250	406	3.80	1.51	293
480	278	4.29	1.37	271
704	272	4.33	1.48	274

Tabla 5.3a. Parámetros del potencial real fenomenológico, tomado con forma de WS^2, para las energías de 250, 480 y 704 MeV, que se obtuvieron de un ajuste alternativo a sus distribuciones angulares

Para el potencial imaginario:

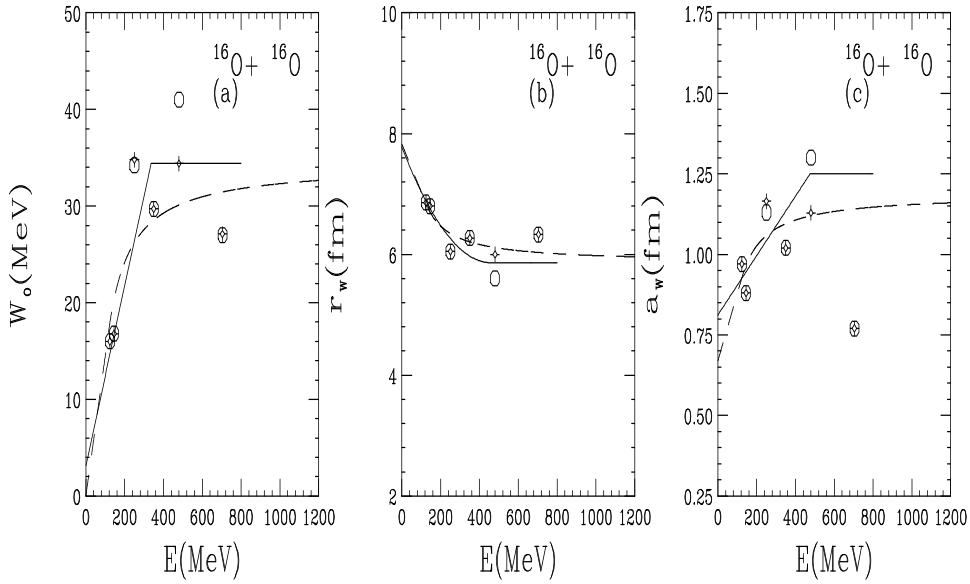

Figure 5.3: *Parámetros del término de volumen del potencial imaginario fenomenológico, los círculos corresponden a $D1$ y las cruces a $D2$ (ver texto, sección 5.2). Las líneas sólidas son las parametrizaciones de ellos $P1$ y las líneas segmentadas aon las parametrizaciones de ellos $P2$ (ver texto, sección 5.3).*

E_{lab} MeV	W_o MeV	r_w fm	a_w fm	W_d MeV	r_d fm	a_d fm	J_w $MeV fm^3$
250	34.8	6.05	1.16	0.23	6.97	0.55	91.7
480	34.4	6.00	1.13	6.21	4.63	0.45	99.8
704	27.1	6.33	0.77	6.55	4.32	0.41	96.0

Tabla 5.3b. Parámetros del potencial imaginario fenomenológico, tomado como suma de un término de volumen con forma de WS^2 y un término de superficie con forma de derivada de WS, para las energías de 250, 480 y 704 MeV, que se obtuvieron de un ajuste alternativo a sus distribuciones angulares

Llamaremos al conjunto de parámetros que resultaron del primer ajuste $D1$ y al conjunto de parámetros que resultaron del segundo ajuste, $D2$.

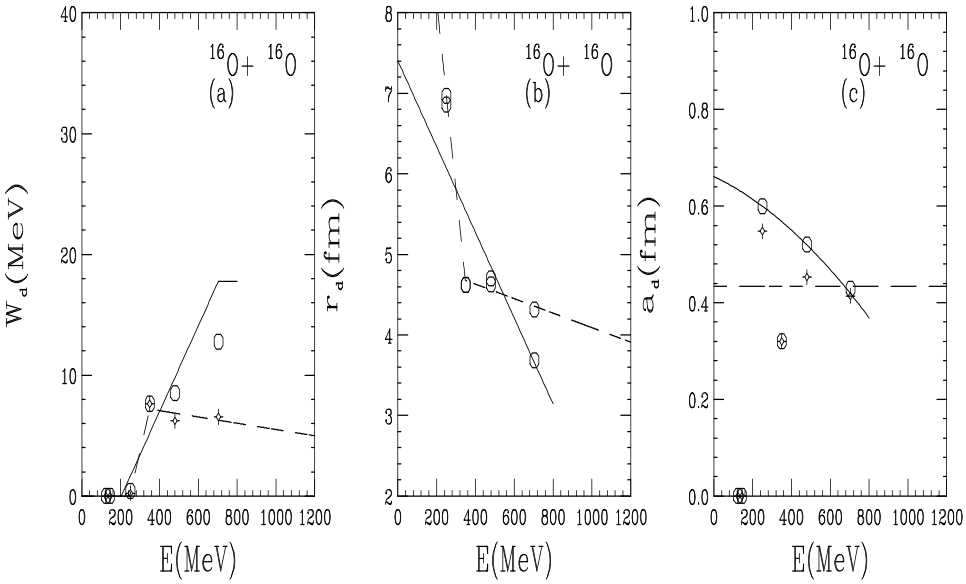

Figure 5.4: *Parámetros del término de superficie del potencial imaginario fenomenológico, los círculos corresponden a $D1$ y las cruces a $D2$ (ver texto, sección 5.2). Las líneas sólidas son las parametrizaciones de ellos $P1$ y las líneas segmentadas son las parametrizaciones de ellos $P2$ (ver texto, sección 5.3).*

En las figuras 5.3 y 5.4 se muestran los valores de $D1$ en círculos y de $D2$ en cruces, para los parámetros del potencial imaginario. En el caso de los parámetros del potencial real, se observa que en $D1$ y $D2$ se tienen prácticamente los mismos potenciales reales, lo cual es conveniente pues sólo se buscaba una forma de dar una parametrización alternativa del potencial imaginario. En la figura 5.5 se muestran los potenciales reales fenomenológicos considerando el conjunto $D1$ de parámetros.

La figura 5.6 muestra con línea punteada el ajuste de la distribución angular dado por los potenciales $D1$. El ajuste obtenido con los potenciales $D2$ resultó igualmente bueno.

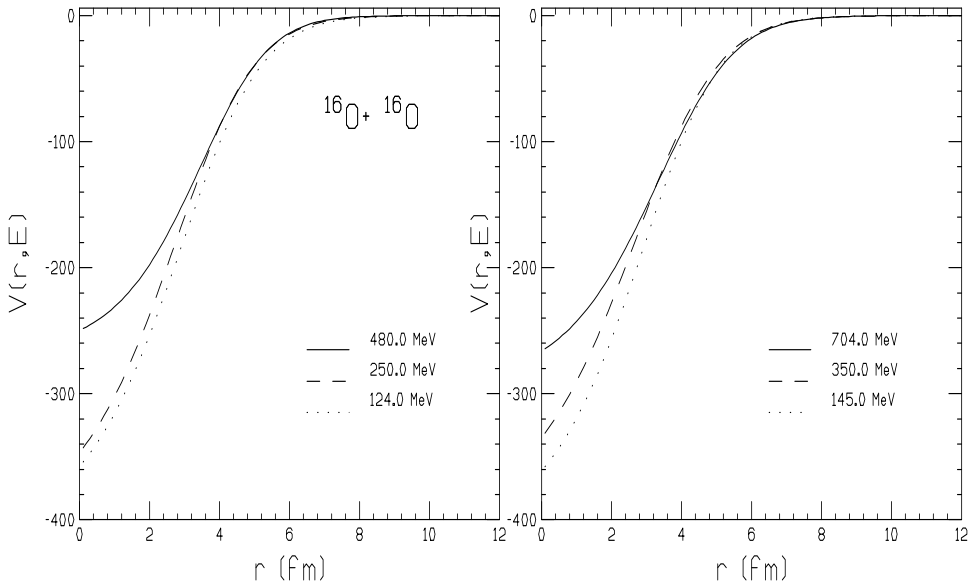

Figure 5.5: *Potenciales reales fenomenológicos con forma de WS^2, calculados con los parámetros del conjunto $P1$ (ver texto, sección 5.3) en el caso de las energías 250, 480 y 704 MeV, y tomando los parámetros dados en las referencias [KO96] para 124 y 145 MeV y [BR91] para 350 MeV.*

5.3 Consideraciones

Sabemos que para poder calcular los potenciales reales aplicando la relación de dispersión se necesita:

1) Un potencial real de referencia a una energía que sea un valor intermedio entre 124 y 704 MeV, que es el intervalo sobre el que se van a calcular las contribuciones dispersivas; la energía que cumplía mejor esto fue $E = 350\ MeV$. A esta energía Khoa y colaboradores [KH95b] propone un potencial de doble convolución calculado a partir de la interacción efectiva BDM3Y1 que será utilizado como potencial real de referencia. Este potencial tiene un profundidad de $\approx 291\ MeV$ al centro.

2) Una parametrización de $W(r, E)$ dependiente de r y E. Tomando en cuenta el conjunto de parámetros $D1$, se dió la parametrización $P1$:

$W_o = 3.14 + 0.093\ E \quad MeV \qquad E \leq 335.8 MeV$
$W_o = 34.44 \quad MeV \qquad E \geq 335.8 MeV$

$r_w = 7.7744 - 0.0083\ E + 0.000009\ E^2 \quad fm \qquad E \leq 466 MeV$
$r_w = 5.86086 \quad fm \qquad E \geq 466 MeV$

$a_w = 0.81161 + 0.000923\ E \quad fm \qquad E \leq 475.03 MeV$
$a_w = 1.25 \quad fm \qquad E \geq 475.03 MeV$

$W_d = 0.0001 \quad MeV \qquad E \leq 203.59 MeV$
$W_d = 34.44 \quad MeV \qquad 203.59 \geq E \leq 704 MeV$

$r_d = 7.4028 - 0.005326\ E \quad fm \qquad E \leq 1389 MeV$
$r_d = 0.0001 \quad fm \qquad E \geq 1389 MeV$

$a_d = 0.6609 - 0.000189\ E - 0.00000022\ E^2 \quad fm \qquad E \leq 1362 MeV$
$a_d = 0.47 \quad fm \qquad E \geq 1362 MeV$

Y tomando en cuenta el conjunto de parámetros $D2$, se dió la parametrización $P2$:

$W_o = 0.14514\ E \quad MeV \qquad E \leq 118.3 MeV$
$W_o = 34.3498 - 2032.35/E \quad MeV \qquad E \geq 118.3 MeV$

$r_w = 7.82655 - 0.0079\ E \quad fm \qquad E \leq 124 MeV$
$r_w = 5.8584 + 122.02/E \quad fm \qquad E \geq 124 MeV$

$a_w = 0.6694 + 0.002086\ E \quad fm \qquad E \leq 124 MeV$
$a_w = 1.1868 - 32.08/E \quad fm \qquad E \geq 124 MeV$

$W_d = 0.0 \quad MeV \qquad E \leq 246.7 MeV$
$W_d = -17.22 + 0.0698\ E \quad MeV \qquad 246.7 \geq E \leq 350 MeV$
$W_d = 8.10 - 0.0026\ E \quad MeV \qquad E \geq 350 MeV$

$r_d = 12.84 - 0.0235\ E \quad fm \qquad E \leq 347.5 MeV$
$r_d = 4.9903 - 0.0009\ E \quad fm \qquad E \geq 347.5 MeV$

$a_d = 0.434 \quad fm$

En las figuras 5.3 y 5.4 se muestran las parametrizaciones $P1$ (en línea sólida) y $P2$ (en línea segmentada).

Para probar la consistencia de los potenciales imaginarios obtenidos de las parametrizaciones $P1$ y $P2$, se calcularon sus integrales de volumen, que se muestran como línea sólida en la figura 5.2c para $P1$, y en la figura 5.7c para $P2$; y se comparan con las integrales de volumen de los potenciales imaginarios fenomenológicos ($D1$ y $D2$), que se muestran en las mismas figuras con círculos. Se observa que las integrales de volumen de los potenciales imaginarios parametrizados y las integrales de volumen de los potenciales imaginarios fenomenológicos tienen valores similares y la misma dependencia con la energía. Esto da confianza en las parametrizaciones de $W(r, E)$ propuestas.

Ahora entonces, teniendo el potencial de referencia $V(r, 350)$ y el potencial imaginario parametrizado, se calcularon las contribuciones dispersivas ΔV_{E_r} y los potenciales reales, de acuerdo con la ecuación 3.3.

5.4 Resultados y Discusión

Considerando la ecuación 3.5 con las parametrizaciones de $W(r, E)$ dadas por $P1$ y $P2$, y los tomando los valores $n = 3$ segmentos por MeV y $E_n = 15000\ MeV$, según el análisis explicado en la sección 3.2, se calcularon las contribuciones dispersivas sustraídas $\Delta V_{E_r}(r, E) = \Delta V(r, E) - \Delta V(r, 350)$, que se muestran en las figuras 5.2a para $P1$ y 5.7a para $P2$. Se observa en ambos casos ($P1$ y $P2$) que la contribución dispersiva sustraída es atractiva para energías menores a la de referencia, disminuyendo su profundidad conforme la energía aumenta hasta llegar a cero para la energía de referencia y luego comenzar a ser repulsiva para energías mayores a la de referencia. Esto significa que debe esperarse que los potenciales que se calcularán sean cada vez menos atractivos con el aumento de la energía, lo que es consistente con lo observado en los potenciales reales fenomenológicos (ver figura 5.5). La

contribución dispersiva sustraída no es una función monotónica, pues presenta "chipotes" entre los 3 y 7 fm que se van introduciendo en el sistema conforme aumenta la energía. Esto se interpreta como consecuencia del comportamiento decreciente de $r_d(E)$, mostrado en la figura 5.4b.

Comparando las contribuciones dispersivas sustraídas calculadas con $P1$ y $P2$, observamos que para energías menores a la de referencia, los "chipotes" son de mayor tamaño para los cálculos con $P2$, mientras que para energías mayores a la de referencia, los cálculos con $P1$ son los que presentan los "chipotes" de mayor tamaño. Esto se puede explicar si observamos lo evolución de W_d con la energía; para energías menores a la de referencia es W_d de $P2$ quien tiene un aumento más rápido con la energía, lo que genera un ΔV_{E_r} mayor para $P2$ que para $P1$ (lo mismo que sucedía con las anomalías del umbral), sin embargo a partir de $E = 246.7\ MeV$ comienza a decrecer y es W_d de $P1$ quien sigue creciendo hasta $E = 704\ MeV$ donde se estabiliza, es por esto que el "chipote" en la contribución dispersiva sustraída a 704 MeV es mayor tomando $P1$ que $P2$. Entonces claramente los "chipotes" de las contribuciones dispersivas sustraídas son principalmente consecuencia de la presencia del término de superficie en el potencial imaginario, lo que hace pensar que efectivamente la relación de dispersión es sensible a la información de la superficie y "subficie" del sistema.

Tomando la ecuación 3.3, el potencial de referencia a $E_r = 350\ MeV$ y los cálculos para la contribución dispersiva con $P1$ y $P2$, se calcularon los potenciales reales para las energías de 250 y 704 MeV que se muestran en línea segmentada en la figura 5.2b para $P1$ y 5.7b para $P2$; en las mismas figuras se muestran en línea sólida los potenciales reales fenomenológicos para las mismas energías. Comparando los potenciales reales calculados con los fenomenológicos, se puede observar que la mayor discrepancia en ellos se encuentra en $r \leq 2\ fm$, la forma de los potenciales reales calculados es claramente diferente a la de los fenomenológicos, pero su valor a un $r \geq 2\ fm$ dado no varía más allá de un 10% del valor de los potenciales fenomenológicos.

Si se considera la contribución dispersiva sustraída calculada con $P2$

para $E = 704\ MeV$ y el potencial real calculado a la misma energía se verá que a $r = 2\ fm$ se tiene $\Delta V_{E_r} \approx 9\ MeV$ y $V \approx 220\ MeV$, lo que significa que ΔV_{E_r} es aproximadamente un 4% del valor de V; ahora en $r = 4.5\ fm$ se tiene $\Delta V_{E_r} \approx 14\ MeV$ y $V \approx 55\ MeV$, es decir ΔV_{E_r} es aproximadamente un 25% del valor de V; por último mírese a $r = 8\ fm$, donde se tiene $\Delta V_{E_r} \approx 0\ MeV$. Lo anterior hace pensar que la contribución dispersiva es más importante entre 3 y 7 fm; es decir en la "subficie" ($2.5\ fm\ < r < 6.05\ fm$) y superficie ($r \approx 6.05\ fm$) del sistema.

Tratando de analizar (en primer orden) la magnitud de los potenciales reales calculados, se obtuvieron sus integrales de volumen, que se muestran en las figuras 5.2c para $P1$ y 5.7c para $P2$ en línea sólida y se comparan con las integrales de volumen de los potenciales fenomenológicos, que se muestran en las mismas figuras en círculos. Se observa que la dependencia con la energía de las integrales de volumen obtenidas con los potenciales reales calculados es en general, la dependencia requerida por las integrales de volumen obtenidas de los potenciales reales fenomenológicos.

El siguiente paso fue obtener la distribución angular con los potenciales reales calculados. En la figura 5.6 se muestran las distribuciones angulares obtenidas usando los potenciales calculados con $P1$ en línea sólida, con $P2$ en línea segmentada y en línea punteada la descripción con potenciales fenomenológicos. Como se observa, las predicciones dan una descripción general de las distribuciones angulares; en el caso de las oscilaciones de Fraunhofer no se tiene tan buena descripción como se tuvo en el sistema $^{12}C +^{12} C$, sin embargo en el caso de $^{16}O +^{16} O$ la descripción de las oscilaciones de Fraunhofer con los potenciales reales fenomenológicos no es mucho mejor que la descripción con los potenciales reales calculados. Por otra parte a la hora de calcular las distribuciones angulares con los potenciales reales calculados se observó que el cálculo de las distribuciones angulares dependía fuertemente del valor del potencial imaginario tomado, bastando tomar "el adecuado" para obtener una buena descripción tanto cualitativamente como cuantitativamente. El valor del potencial imaginario "adecuado" estaba entre los valores de los potenciales parametrizados y de los potenciales

fenomenológicos, por lo que se considera está dentro de la "tolerancia"

de la parametrización, entendiendo como "tolerancia" la diferencia entre los valores de la parametrización del potencial imaginario y los valores del potencial imaginario fenomenológico.

Pero como el objetivo no es ajustar las distribuciones angulares sino evaluar a los potenciales reales calculados, se hizo un análisis para determinar la posición del mínimo anterior al ángulo de arcoiris dado por los potenciales reales calculados. En la figura 5.8 se muestran los cálculos de las distribuciones angulares, en línea sólida tomando el potencial real calculado con $P1$, en línea segmentada con el potencial real calculado con $P2$, y en línea punteada con el potencial real fenomenológico. Observamos que el potencial real calculado con $P1$ pone el mínimo anterior al ángulo de arcoiris en $\approx 34^o$, el potencial real calculado con $P2$ lo pone en $\approx 32^o$ y los datos lo piden en $\approx 25^o$, para $E = 480\ MeV$. En el caso de $E = 704\ MeV$ tenemos que la posición del mínimo anterior al ángulo de arcoiris es $\approx 21^o$, $\approx 20^o$ y $\approx 16^o$, obtenidos con los potenciales reales calculados con $P1$, $P2$ y los potenciales reales fenomenológicos, respectivamente. Para ambas energías el desacuerdo en la posición del primer mínimo anterior al ángulo de arcoiris respecto a lo que los datos exigen es notorio ($\approx 30\%$).

Se intentó normalizar los potenciales reales calculados esperando describir correctamente la posición del primer mínimo anterior al ángulo de arcoiris, como sucedió en el sistema $^{12}C +^{12} C$. Pero para el sistema $^{16}O +^{16} O$ no fue posible encontrar ninguna normalización que mejorara la descripción de los datos.

Para tener un punto comparativo, se calculó la posición del primer mínimo anterior al ángulo de arcoiris con un potencial real que no dependía de la energía (se tomó el potencial real de referencia). En la figura 5.8 se muestra el cálculo de las distribuciones angulares en línea punteada-segmentada utilizando el potencial independiente de la energía. Se observa que la posición del primer mínimo anterior al ángulo de arcoiris obtenido con los potenciales reales calculados no es considerablemente mejor a lo que se tendría con un potencial independiente de la energía; sin embargo, tomar un potencial independiente de la energía no describe la dependencia con la energía de las integrales de volumen

que requieren los datos.

Comparando las integrales de volumen reales y la posición del primer mínimo anterior al ángulo de arcoiris obtenidos con los potenciales reales calculados con $P1$ y $P2$, podemos observar que tomar una u otra parametrización no se refleja en cambios sustanciales en los cálculos, es decir, que los resultados no dependen de los detalles finos de la parametrización de W escogida. Por supuesto no debemos olvidar que, sea cual sea la parametrización, la dependencia con la energía de sus integrales de volumen J_w debe ser la requerida por los potenciales imaginarios que describen los datos.

5.5 Conclusiones

Se realizó un análisis de las distribuciones angulares a energías de 250, 480 y 704 MeV con potenciales reales con forma de WS^2 y potenciales imaginarios definidos como la suma de un término de volumen con forma de WS^2 y un término de superficie con forma de derivada de WS, dando como resultado los valores para los parámetros mostrados en las tablas 5.2a, 5.2b, 5.3a y 5.3b incluídas en la sección 5.2.

La aplicación de la relación de dispersión a los potenciales imaginarios en el sistema $^{16}O - ^{16}O$ permite evaluar la contribución dispersiva dependiente de la energía y el radio y así calcular potenciales reales como función de la energía y el radio. Estos difieren de los fenomenológicos principalmente en $r \leq 2\ fm$, mientras que para $r \geq 2\ fm$ los potenciales reales calculados no difieren en más de un 10% de los potenciales reales fenomenológicos.

Las integrales de volumen de estos potenciales reales calculados contienen en términos generales, la misma dependencia con la energía que las integrales de volumen de los potenciales reales fenomenológicos. Las distribuciones angulares calculadas con estos potenciales describen cualitativamente los datos, la descripción de las oscilaciones de Frauhofer son tan buenas como la descripción con potenciales fenomenológicos, sin embargo la evolución con la energía de la posición del primer mínimo

de arcoiris no es descrita con precisión.

Una normalización de los potenciales reales calculados que mejorara las descripciones de las distribuciones angulares y la posición del primer mínimo anterior al ángulo de arcoiris no fue encontrada. Sin embargo, una variación pequeña en el potencial imaginario dentro de la tolerancia de las parametrizaciones, hacía posible mejorar las descripciones de las distribuciones angulares, lo que no sucedía en el sistema $^{12}C -^{12} C$, por lo que se concluye que el cálculo de las distribuciones angulares de $^{16}O -^{16} O$ depende fuertemente del potencial imaginario.

La aparición de "chipotes" en la contribución dispersiva como un reflejo de la presencia del término de superficie en el potencial imaginario, confirma la sensibilidad de la relación de dispersión a la información contenida en la "subficie" y superficie del sistema, siendo además, en esta zona, más importante su contribución.

Los cálculos de la contribución dispersiva dependen de la parametrización del potencial imaginario, pero en el cálculo de los potenciales reales, de las integrales de volumen reales y en las descripciones de las distribuciones angulares y las posiciones del primer mínimo anterior al ángulo de arcoiris no hay diferencia significativa entre tomar una parametrización del potencial imaginario u otra equivalente.

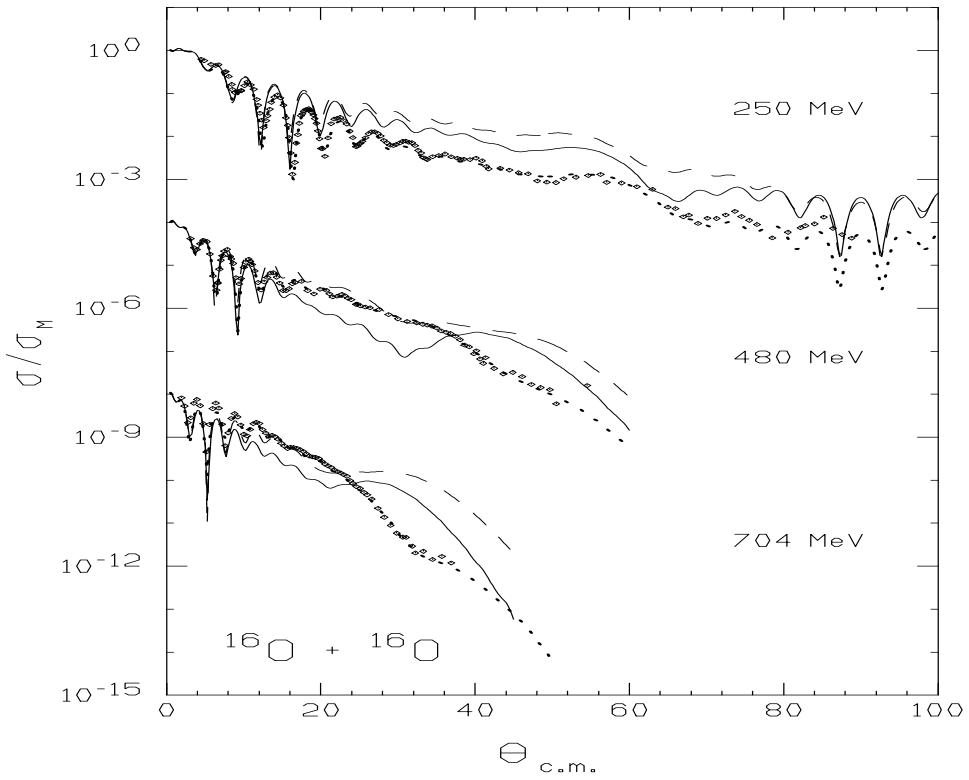

Figure 5.6: *Datos de la dispersión elástica dividida por la sección eficaz Mott. Las líneas sólidas y segmentadas son los cálculos de la distribución angular utilizando los potenciales reales calculados con la relación de dispersión y las parametrizaciones del potencial imaginario P1 y P2, respectivamente. Las líneas punteadas son las distribuciones angulares calculadas con los potenciales fenomenológicos* $D1$. *Los símbolos son datos a 250, 480 y 704 MeV obtenidos de las referencias [KH94,KH95b,BA96b]*

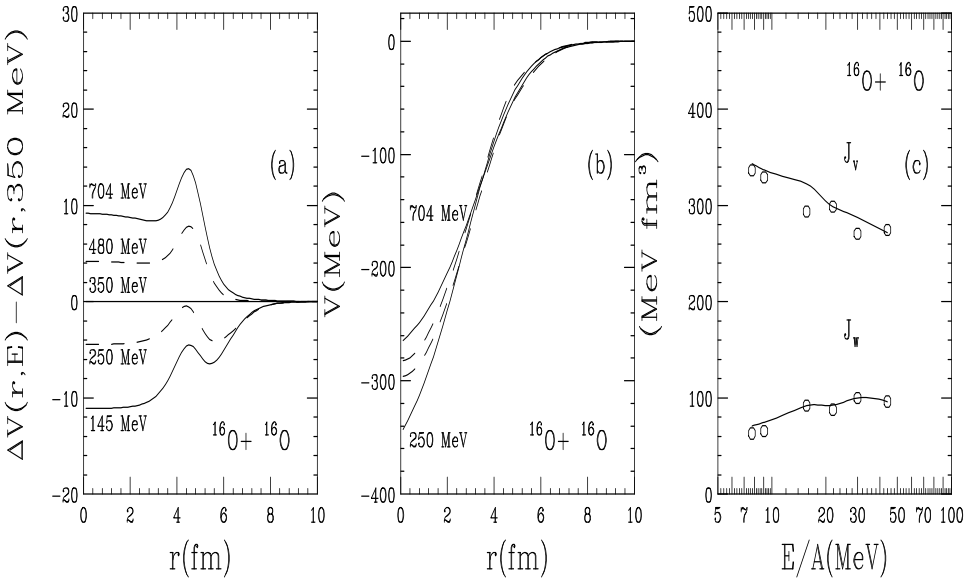

Figure 5.7: *Considerando los datos de la tablas 5.3a y 5.3b y la parametrización P2, (a) La contribución dispersiva sustraída para la parte real de el potencial, en MeV. (b) Los potenciales reales calculados a dos energías: las 2 inferiores corresponden a 250 MeV y las 2 restantes a 704 MeV. Las líneas sólidas son los potenciales reales fenomenológicos, las segmentadas son los potenciales reales calculados con la relación de dispersión. (c) Integrales de volumen para los potenciales fenomenológicos (círculos) y para los potenciales reales calculados y las parametrizaciones del imaginario (líneas sólidas)*

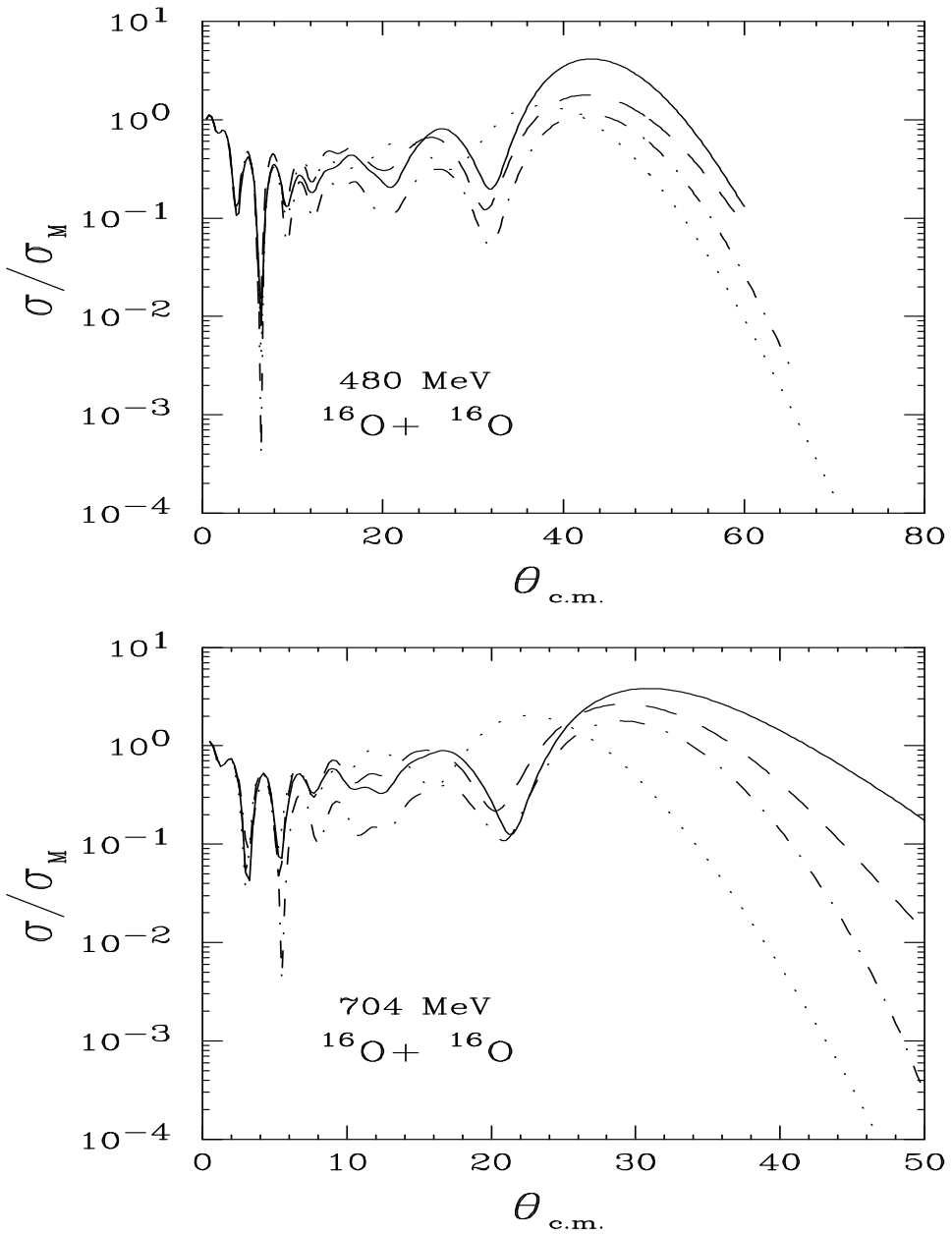

Figure 5.8: *Cálculo de la distribución angular tomando sólo el* 50% *del valor de la profundidad del potencial imaginario reportado en la tabla 5.2. En líneas sólidas y segmentadas utilizando los potenciales reales calculados con la relación de dispersión,* $P1$ *y* $P2$*, respectivamente; en línea punteada utilizando el potencial real fenomenológico; y en línea punteada-segmentada, utilizando el potencial real de doble convolución de referencia para* $E = 350\ MeV$.

Capítulo 6

Discusión y conclusiones generales

La aplicación de la relación de dispersión dependiente del radio y de la energía a los potenciales imaginarios en los sistemas $^{12}C - ^{12}C$ y $^{16}O - ^{16}O$, permitió evaluar la contribución dispersiva sustraída ΔV_{E_r} dependiente del radio y la energía. El procedimiento requirió dar solución analítica a la relación de dispersión, determinar el potencial imaginario en todo radio y energía y el conocimiento de un potencial real bien determinado a una energía de referencia.

El cálculo de la contribución dispersiva depende de la parametrización de W propuesta, sin embargo en la descripción de la dependencia con la energía de las integrales de volumen y la evolución con la energía de la posición del primer mínimo anterior al ángulo de arcoiris, no hay diferencia significativa en tomar una parametrización u otra que dé ajustes equivalentes a los datos.

La principal contribución de la relación de dispersión a los potenciales reales es en la superficie y "subficie" del sistema, donde representa hasta un $\approx 35\%$ del valor de los potenciales calculados. Además, la contribución de la relación de dispersión resultó sensible a la información contenida en la superficie y "subficie" del sistema, donde por superficie se entiende como $r \sim R_s = 1.2(A_b^{\frac{1}{3}} + A_p^{\frac{1}{3}})$ y "subficie" como

$2.5\ fm\ < r < R_s$. Para $^{12}C -^{12} C$, $R_s = 5.5\ fm$ y para $^{16}O -^{16} O$, $R_s = 6.05\ fm$.

Las integrales de volumen de los potenciales reales calculados describen dentro de un 15% la dependencia con la energía requerida por las integrales de volumen de los potenciales reales fenomenológicos en el intervalo de energías entre 10 y 90 MeV por nucleón. Sin embargo, sólo en el caso del sistema $^{12}C -^{12} C$, la posición del primer mínimo anterior al ángulo del arcoiris es descrita dentro de un 15% del valor requerido por los datos. La discrepancia alcanza un 30% para $^{16}O -^{16} O$.

Nuestro acuerdo con las dependencias con la energía de las integrales de volumen de los potenciales reales calculados y de los potenciales reales fenomenológicos, nos hace pensar que la dependencia con la energía de los potenciales reales calculados se está determinando bien en forma global, lo que muestran sus integrales de volumen. Esto se interpreta como una consecuencia de que la dependencia con la energía de las integrales de volumen de los potenciales imaginarios es la requerida por los datos.

Recordemos que cuando el potencial imaginario no tiene dependencia con la energía, la contribución dispersiva depende principalmente de la forma radial del potencial imaginario. En gran parte del intervalo de energías en el que se calcularon los potenciales reales en esta tesis, el potencial imaginario tiene una débil dependencia con la energía, por lo que la contribución dispersiva dependerá fuertemente de la forma radial del potencial imaginario. Los resultados de este trabajo (buen acuerdo con integrales de volumen, pero no con la posición exacta del primer mínimo anterior al ángulo de arcoiris o mínimo refractivo) sugieren que una causa posible del desacuerdo sea una insuficiente determinación de la forma radial de $W(r, E)$. Recientemente, dos trabajos independientes, ambos relacionados con sistemas similares parecen apoyar esta hipótesis.

En primer lugar, análisis de modelo óptico recientes en el sistema $^{16}O -^{12} C$ en las energías de 230 [SA98] y 169 MeV [OG98] han encontrado potenciales reales cuya integral de volumen corresponde a la

familia identificada como "correcta" (que ubica el mínimo refractivo en el lugar requerido por los datos a energías donde se ve el arcoiris) pero que, al optimizar su forma radial, real o imaginaria, induce desplazamientos apreciables en el mínimo refractivo. La conclusión preliminar de este trabajo es que pequeñas variaciones en absorción o contribución dispersiva a $V(r)$ pueden tener un gran efecto en los detalles de la distribución angular.

Por otro lado, resultados preliminares del análisis de $^{16}O -^{16} O$ a energías entre 60 y 130 MeV [BR98] sugieren una transición brusca de régimen de absorción que se manifiesta en un cambio en la forma radial de $W(r, E)$, manteniendo el comportamiento regular de las integrales de volumen.

Estos dos resultados coinciden en que la integral de volumen parece ser un excelente indicador global de la dependencia del potencial con la energía, pero que el detalle último reside en la parte radial. La relación de dispersión, tal como fue aplicada en este trabajo, parece incapaz de contener toda la dependencia radial necesaria.
También cabe la posibilidad de que elementos no considerados en la relación de dispersión como efectos de no-localidad, sean la causa de las discrepancias entre los cálculos y lo requerido por los datos.

En resumen, hemos aplicado la relación de dispersión a la dependencia radial y con la energía del potencial óptico nuclear para dos sistemas de iones pesados. Las contribuciones dispersivas describen de manera global la dependencia requerida por los datos de dispersión elástica, sin embargo, los detalles más finos de $V(r, E)$ no quedan completamente descritos por la relación de dispersión.

Bibliografía

[AC75] V. Acosta, *Curso de Física Moderna*, Harla(1975).

[BA52] H.H. Barschall, *Phys. Rev.* **85**(1952)431.

[BA96a] D. Baye, G. Levar y J.M. Sparenberg, *Nucl. Phys.* **A599**(1996)435.

[BA96b] G. Barnitzky, A. Blazevic, H.G. Bohlen, et. al., *Phys. Lett.* **B365**(1996)23.

[BE71a] A. Beiser, *Conceptos de Física Moderna*, Mc Graw Hill (1971).

[BE71b] H.A. Bethe, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **21** (1971)93.

[BO82] H.G. Bohlen, M.R. Clover, G. Ingold, H. Letan, W. von Oertzen y Zeit, *Phys.* **A308**(1982)121.

[BR82] M.E. Brandan, *Phys. Rev. Lett.* **49**(1982)1132.

[BR85] D.M. Brink, *Semi-Classical Methods for nucleus-nucleus scattering*, Cambridge University Press (1985).

[BR88a] M.E. Brandan, *Phys. Rev. Lett.* **60**(1988)784.

[BR88b] M.E. Brandan, G.R. Satchler, *Nucl. Phys.* **A487**(1988)477.

[BR89] M.E. Brandan, *Rev. Mex. Fis.* **35**(1989)335.

[BR90] M.E. Brandan, M. Rodríguez-Villafuerte, y A. Ayala, *Phys. Rev.* **C41**(1990)1520.

[BR91a] M.E. Brandan y G.R. Satchler, *Phys. Lett.* **B256**(1991)311.

[BR91b] M.E. Brandan y K.W. McVoy, *Phys. Rev.* **C43**(1991)1140.

[BR93] M.E. Brandan et al, *Phys. Rev.* **C48**(1993)1147.

[BR95] M.E. Brandan, in *Low Energy Nuclear Dinamics, edited by Yu. Oganessian, W. von Oertzen and R. Kalpakchieva*, World Scientific Publishing Co. (1995)399.

[BR96] M.E. Brandan, M.S. Hussein, K.W. McVoy y G.R. Satchler, *Comments Nucl. Part. Phys.* **22-2**(1996)77.

[BR97] M.E. Brandan y G.R. Satchler, *Phys. Rep.* **285**(1997)143.

[BR98] M.E. Brandan, comunicación personal.

[BU82] M. Buenerd et al., *Phys. Rev.* **C26**(1982)1299.

[BU84] M. Buenerd et al., *Nuc. Phys.* **A424**(1984)313.

[CO49] L.S. Cook, E.M. Mc Millan, J.M. Peterson y D.C. Sewell, *Phys. Rev.* **75**(1949)7.

[CO62] J.M. Cornwall y M.A. Ruderman, *Phys. Rev.* **128**(1962)1474.

[CR91] Crawford, *Ondas*, Editorial Reverté (1991).

[DA94] A. Das y T. Ferbel, *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, John Wiley & Sons (1994).

[DE77] R.M. DeVries, D.S. Goldberg, J.W. Watson, M.S. Zisman y J.G. Clover, *Phys. Rev. Lett.* **39**(1977)450.

[DR63] R.M. Drisko, G.R. Satchler y R.H. Bassel, *Phys. Lett.* **5**(1963)347.

[EL85] M. El-Azab Farid y G.R. Satchler, *Nucl. Phys.* **A438**(1985)525.

[FE49] S. Fernbach, R. Serber y T.B. Taylor, *Phys. Rev.* **75**(1949)1352.

[FE54] H. Feshbach, C.E. Porter y V.F. Weisskopf, *Phys. Rev.* **96**(1954)448.

[FE58] H. Feshbach, *Ann. Phys. (Ny)* **5**(1958)357.

[FE66] Feynman, Leighton, Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison Wesley **II**(1966).

[FE87] Feynman, Leighton, Sands, *Física*, Addison Wesley Iberoamericana **I**(1987).

[FE92] H. Feshbach, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons (1992).

[GO72] D.A. Goldberg, S.M. Smith, *Phys. Rev. lett.* **29**(1972)500.

[GO74] D.A. Goldberg, S.M. Smith, G.F. Burdsick, *Phys. Rev.* **C10**(1974)1362.

[GO97] M.M. González y M.E. Brandan, *Rev. Mex. Fis.* **43-1**(1997)137.

[HO71] P.E. Hodgson, *Nuclear Reaction and Nuclear Structure*, Oxford University Press (1971).

[HO78] P.E. Hodgson, *Nuclear Heavy-Ion Reactions*, Clarendon Press, Oxford (1978).

[JA75] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley New York (1975).

[KH93] Dao T. Khoa y W. von Oertzen, *Phys. Lett.* **B304**(1993)8.

[KH94] Dao T. Khoa, W. von Oertzen y H.G. Bohlen, *Phys. Rev.* **C49**(1994)1652.

[KH95a] Dao T. Khoa y W. von Oertzen, *Phys. Lett.* **B342**(1995)6.

[KH95b] Dao T. Khoa, W. von Oertzen, H.G. Bohlen, et al., *Phys. Rev. Lett.* **74**(1995)34.

[KN76] J. Knoll y R. Schaeffer, *Ann. Phys. (NY)* **97**(1976)307.

[KO82] A.M. Kobos y colaboradores, *Nucl. Phys.* **A384**(1982)65; **A425**(1984)205

[KO90] Y. Kondo, F. Michel, G. Reidemeister, *Phys. Lett.* **B242**(1990)340.

[KO96] Y. Kondo, Y. Sugiyama, Y. Tomita, Y. Yamamuchi, H. Ikezoe, K. Ideno, S. Hamada, T.Sugimitsu, M. Hijiya y H. Fujita, *Phys. Lett.* **B365**(1996)17.

[KU83] S. Kubono et al, *Phys. Lett.* **B127**(1983)19.

[LI85] J.S. Lilley, B.R. Fulton, M.A. Nagarajan, I.S. Thompson y D.W. Banes, *Phys. Lett.* **B151**(1985)181.

[MA78] M.M. MacFarlane y S.C. Pieper, *Ptolemy*, Argonne National Laboratory Report **No. ANL-76-11** (1978) (no publicado).

[MA86a] M.M. Mahaux, H. Ngô y G.R. Satchler, *Nuc. Phys.* **A449**(1986)354.

[MA86b] M.M. Mahaux, H. Ngô y G.R. Satchler, *Nuc. Phys.* **A456**(1986)134.

[MC70] I.E. McCarthy, *Nuclear Reactions*, Pergamon Press Ltd. (1970).

[OG98] A.A. Oglobin et al, *Phys. Rev.* **C57**(1998)1797.

[RE86] Reitz, Milford, Christy, *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, Addison Wesley Iberoamericana 3ra. ed. (1986).

[RU11] E. Rutherford, *Phil. Mag.* **5**(1911)576.

[RU29] E. Rutherford, *Proc. Roy. Soc.* **A123**(1929)373.

[SA77] G.R. Satchler, *Nuc. Phys.* **A279**(1977)493.

[SA79] G.R. Satchler y W.G. Love, *Phys. Rep.* **55**(1979)183.

[SA80a] G.R. Satchler, *Introduction to Nuclear Reactions*, McMillan Education Ltd. (1980).

[SA80b] G.R. Satchler et al, *Nuc. Phys.* **A495**(1980)179.

[SA83] G.R. Satchler, *Direct Nuclear Reactions*, International Series of Monographs on Physics 68. (1983).

[SA91] G.R. Satchler, *Phys. Rep.* **199**(1991)47.

[SA98] G.R. Satchler, Comunicación personal.

[SC80] P. Schwandt, S. Kailas, W.W. Jacobs, M.D. Kaitchuck, W. Ploughe y P.P. Singh, *Phys. Rev.* **C21**(1980)1656.

[SE72] E. Segré, *Núcleos y partículas* Editorial Reverté (1972).

[ST89] E. Stiliaris, H.G. Bohlen, P. Fröbrich, B. Gebauer, D. Kolbert W. Von Oertzen, M. Wilpert y Th. Wilpert, *Phys. Lett.* **B223**(1989)91.

[ST90] E. Stiliaris, H.G. Bohlen, P. Fröbrich, B. Gebauer, D. Kolbert W. Von Oertzen, M. Wilpert y Th. Wilpert, *HMI Annual Report 1989* **HMI-B-482**(1990)50.

[SU93] Y. Sugiyama, T. Tomita, H. Ikezoe, Y. Yamamuchi, H. Ideno, S. Hamada, T. Sugimitsu, M. Hijiya y Y. Kondo, *Phys. Lett.* **B312**(1993)35.

[WO54] R.D. Woods y D.S. Saxon, *Phys. Rev.* **95**(1954)577.