

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA
Y
CENTRO DE RADIOASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

EXAMEN DE ADMISIÓN

Semestre 2012-II

(PRIMAVERA DEL 2012)

a 11 de Noviembre de 2011

La duración del examen es de 6 horas en total, de 2 sesiones de 3 horas; a razón de 1-1/2 hora por área de conocimiento. Habrá una sesión matutina y otra vespertina.

La 1ra. sesión incluye los temas de Mecánica Clásica y Electromagnetismo, y la 2da. de Física Cuántica y Térmica.

Seleccione 2 problemas por área.

Responda las preguntas en hojas separadas (por una sola cara).

Escriba su clave asignada en cada una de las hojas utilizadas en la parte superior derecha dentro de un recuadro. Numere las hojas de cada problema, en la parte inferior derecha, de la forma x/y ; donde x es la hoja correspondiente del total y de hojas utilizadas para el problema.

Parte I

Mecánica Clásica y
Electromagnetismo

Mecánica Clásica

- 1.) Un satélite se encuentra en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. En perigeo (posición más cercana) su altura es 300 km arriba de la superficie de la Tierra y su velocidad en este punto es 9000 m s^{-1} .
- a) Encuentre la excentricidad, ϵ , de la órbita.
 - b) Encuentre la altura del satélite arriba de la superficie de la Tierra cuando se encuentra en apogeo (posición más lejana).

Ayuda: Ecuación de la órbita es $r(\phi) = c/(1 + \epsilon \cos \phi)$ donde $c = l^2/\gamma\mu$ es constante, l es el momento angular, $\gamma = GMm$ y μ es la masa reducida. La masa de la Tierra es $6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$, el radio de la Tierra es $6.4 \times 10^6 \text{ m}$ y la constante gravitacional es $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ s}^{-2}$.

- 2.) Imagine que hay un tubo vacío que pasa directo de un lado de la Tierra al otro por el centro del planeta. Se deja caer un objeto de masa m en un extremo del tubo.
- a) Si la fuerza de gravedad sobre el objeto cuando está ubicado dentro de la Tierra a distancia r del centro depende únicamente de la masa de la Tierra que se encuentra interior a este radio, demuestre que la magnitud de esta fuerza es

$$F = \frac{mgr}{R}$$
 en donde R es el radio de la Tierra y g es la aceleración debido a la gravedad en la superficie de la Tierra, suponiendo que la densidad de la Tierra es uniforme. ¿En qué dirección actúa la fuerza?
 - b) Si dentro del tubo hay un vacío (no hay aire, ni líquido), escriba la ecuación de movimiento del objeto. ¿Qué tipo de movimiento describe esta ecuación?
 - c) Encuentre el tiempo para que el objeto llegue al otro extremo del tubo si el radio de la Tierra es $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ y la aceleración debido a la gravedad en la superficie es $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.
 - d) ¿Cuál es la velocidad del objeto cuando pasa por el centro de la Tierra?

...el problema 3 está en la siguiente página

- 3.) Una masa m está colgada de una cuerda sin masa. El otro extremo de la cuerda está embobinado varias veces alrededor de un cilindro horizontal de radio R y momento de inercia I , el cual es libre de girar alrededor de un eje fijo horizontal (ver Figura 1). Si x es la distancia de la masa debajo del eje del cilindro:

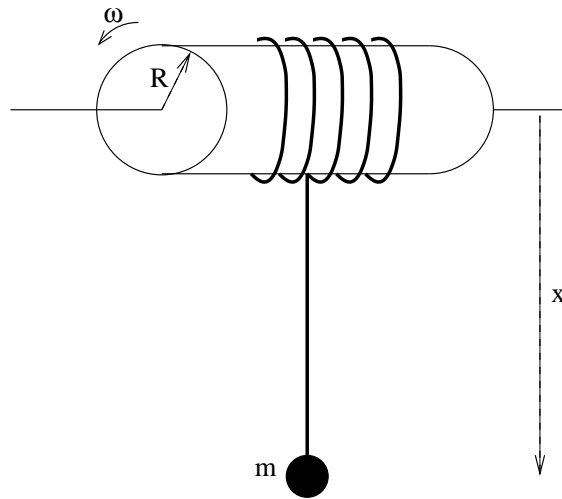


Figura 1

- Escriba la función Lagrangiana del sistema.
- Escriba la ecuación de Lagrange del sistema.
- Encuentre la aceleración de la masa m .

Electromagnetismo

- 1.) Considere un arreglo de cargas como se muestra en la Figura 2. Por sencillez suponga que todo se encuentra en un plano, e.g. $z = 0$:

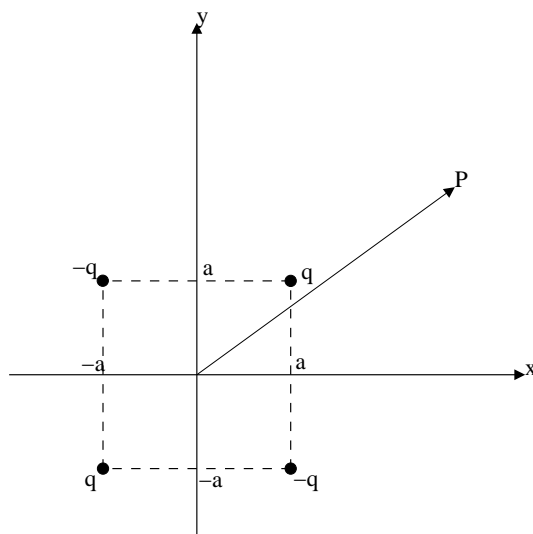


Figura 2

- a) Encuentre una expresión para el potencial electrostático en el punto P .
- b) ¿Cuáles son las componentes monopolar y dipolar (respecto del origen de los ejes de la figura) del potencial lejos del arreglo de cargas ($|P| \gg a$)? Justifique su respuesta.
- 2.) Se tiene un cable conductor (cilindro largo) de radio a por el cual circula una corriente estacionaria I en la superficie.
- a) Calcule el campo magnético (dirección y magnitud) dentro y fuera del cilindro, como función de la distancia s medida desde el centro del cable.
- b) Si el cable es neutro (es decir no tiene una carga neta), ¿cuál es la fuerza (dirección y magnitud) que experimentaría una carga q que se mueve radialmente hacia el cable a una velocidad constante v ?

...el problema 3 está en la siguiente página

- 3.) El marco inercial S' tiene velocidad $v = 0.6c$ relativo a marco inercial S ; donde c es la velocidad de la luz. Los relojes están ajustados para que el tiempo $t = t' = 0$ en la coordenada espacial $x = x' = 0$. Dos eventos ocurren en el marco S :

Evento 1 está en: $x_1 = 10$ m, $t_1 = 2 \times 10^{-7}$ s ($y_1 = z_1 = 0$).

Evento 2 está en: $x_2 = 50$ m, $t_2 = 3 \times 10^{-7}$ s ($y_2 = z_2 = 0$).

- a) ¿Cuál es la distancia espacial entre los eventos visto por S' ?
- b) ¿Cuál es el lapso de tiempo entre los eventos visto por S' ?
- c) ¿Cuál es la magnitud del intervalo espacio-tiempo, Δs , en el marco S y en el marco S' ? ¿Cómo se comparan tales intervalos?

Parte II

Física Cuántica y Térmica

Física Cuántica

1.) Considere una partícula atómica en un potencial en tres dimensiones:

$$V(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

- a) ¿Cuáles son sus energías?
- b) ¿Cuál es su degeneración de los estados de energía?
- c) Suponga que la partícula tiene una carga q y se agrega un campo eléctrico de forma que se agrega un término $-qEz$ al potencial. ¿Cuáles son las energías en este caso?
- d) ¿Cuál es el valor esperado de la posición de la partícula con el campo eléctrico presente?

2.) Se tienen un electrón y un neutrón. Ambos están ligados a un potencial central de tipo de Coulomb. A su vez, el neutrón y el electrón interactúan a través de sus spines. Con todo ello, resulta que el Hamiltoniano se puede escribir como:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_e^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_n^2 - \frac{\epsilon}{r_e} - \frac{\epsilon}{r_n} + \lambda \vec{S}_e \cdot \vec{S}_n$$

donde el subíndice e se refiere al electrón y el subíndice n al neutrón y \vec{S} es el operador de spin. ϵ y λ son ciertas constantes que miden la intensidad de la interacción.

- a) Identifique en el Hamiltoniano cuáles son los términos cinéticos, los debidos al potencial central y los de interacción entre spines.
- b) Expresé $\vec{S}_e \cdot \vec{S}_n$ en función de los operadores $S_{x,e}$, $S_{y,e}$, $S_{z,e}$, $S_{x,n}$, $S_{y,n}$ y $S_{z,n}$.
- c) Se define el momento angular total $\vec{J} \equiv \vec{L}_e + \vec{L}_n + \vec{S}_e + \vec{S}_n$, donde \vec{L} son los operadores de momento angular orbital.
 - (i) Evalúe el conmutador $[\vec{L}_e, \vec{L}_n]$.
 - (ii) Si los números cuánticos del electrón son $l = 1$, $m = -1$ y $s_z = 1/2$ y los números cuánticos del neutrón son $l' = 1$, $m' = -1$ y $s'_z = 1/2$, calcular los posibles valores de \vec{J} cuando se haga una medida.
- d) Demostrar si un estado cualquiera dado por los números cuánticos del electrón y del neutrón $\langle (n l m s_z)_e (n' l' m' s'_z)_n \rangle$ es propio del Hamiltoniano o no.

...el problema 3 está en la siguiente página

3.) Considere un pozo de potencial esférico:

$$\begin{aligned} V(r) &= 0 & , \text{ si } r > R \\ V(r) &= -V_0 & , \text{ si } 0 < r < R \end{aligned} \quad (1)$$

Encuentre los eigenestados con $l = 0$ y la ecuación para encontrar las energías de los estados ligados ($-V_0 < E < 0$). La ecuación de onda, para la parte radial, en coordenadas esféricas es

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r)$$

Física Térmica

- 1.) El estado inicial de una mol de gas ideal es $P_0 = 40 \text{ Pa}$, $V_0 = 8 \text{ m}^3$ y el estado final es de 1 Pa y volumen de 64 m^3 . Suponga que el proceso se realiza a lo largo de la recta que une estos dos puntos.
- Dibuje esta línea en el diagrama P - V y calcule T en función de V a lo largo de este proceso.
 - Calcule el valor de V para el cual T es máxima.
- 2.) Dos cilindros térmicamente aislados y de igual volumen, A y B, están equipados con pistones y están conectados por una válvula. Inicialmente, el pistón en A está completamente extendido y el cilindro contiene gas ideal monoatómico a temperatura T , mientras que el pistón en B está completamente comprimido, con la válvula entre los cilindros cerrada. Calcule la temperatura del gas en los cilindros al final de los siguientes procesos, cada uno empezando de la condición arriba descrita:
- Se abre la válvula y el gas es pasado lentamente al cilindro B al jalar el pistón B; el pistón A se mantiene en su posición extendida.
 - El pistón B se extiende completamente y la válvula se abre ligeramente. Se permite que parte del gas pase al cilindro B al comprimir el pistón A de manera que la presión en el cilindro A se mantenga constante; los cilindros están en contacto térmico.
- 3.) La probabilidad de que un sistema esté en el i -ésimo microestado es

$$P_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z},$$

donde E_i es la energía del i -ésimo microestado y β y Z son constantes. Demuestre que la entropía está dada por,

$$S/k_B = \ln Z + \beta U.$$

 CONSTANTES FÍSICAS Y FACTORES DE CONVERSIÓN

Velocidad de la luz	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Carga del electrón	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masa del electrón	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Constante de Planck	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}^{-1}$
	\hbar	$1.054 \times 10^{-34} \text{ J s}^{-1}$
	h	$4.14 \times 10^{-15} \text{ eV s}$
	hc	12.4 keV \AA
Constante de gravedad	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Permitividad del vacío	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$
Permeabilidad magnética del vacío	μ_0	$1.26 \times 10^{-6} \text{ m kg C}^{-2}$
Número de Avogadro	N_A	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Constante de los gases	R	$8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ 1 kmol = 10^3 mol
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$	$5.788 \times 10^{-9} \text{ eV G}^{-1}$.
Electrón volt	1 eV	$1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$
Joule	J	10^7 erg
Angstrom	Å	$10^{-10} \text{ m} = 0.1 \text{ nm}$
statvolt/cm (campo eléctrico)	statv/cm	$3 \times 10^4 \text{ volt/m}$ (1 volt/m = 1 N/C)
Atmósfera	atm	$= 1.01325 \text{ bar} = 101,325 \text{ Pa}$
