Rev. Mexicana Astron. Astrof., 8, 91-108 (1983)

CINEMATICA GALACTICA LOCAL: UN MODELO ISOTERMICO

Jorge Núñez
Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos
Universidad de Barcelona

Received 1983 January 3

RESUMEN

Los parámetros cinemáticos de la rotación galáctica en las proximidades del Sol así como las correcciones a la constante de la precesión han sido calculados. Para ello, se ha usado un modelo "isotérmico" para el entorno solar junto con los momentos centrados (hasta el cuarto orden) de la distribución de velocidades residuales y el modelo tridimensional de Ogorodnikov-Milne. Como fuente de datos se han utilizado distintas muestras de los Catálogos de Gliese y del "512 Distant FK4/FK4 Sup. Stars" (Fricke 1977).

ABSTRACT

The kinematical parameters of galactic rotation in the solar neighborhood and the corrections to the precession have been calculated. For this purpose, an "isothermal" model for the solar neighborhood has been used together with the high order momenta of the local stellar velocity distribution and the Ogorodnikov-Milne model. Both have been calculated using some samples of the "512 Distant FK4/FK4 Sup. Stars" of Fricke (1977) and of Gliese's Catalogue.

Key words: GALACTIC STRUCTURE – STELLAR DYNAMICS

I. INTRODUCCION

La distribución de las velocidades residuales y los parámetros cinemáticos en el entorno solar han sido calculados por diversos autores (véase Delhaye 1965). Sin embargo, las diferencias significativas que aparecen entre las distintas determinaciones nos animaron a profundizar en este tema. El método estadístico aplicado y los datos utilizados son las principales causas de tales discrepancias. Por ello, hemos dedicado el apartado II a analizar los datos disponibles, para tratar de encontrar las causas de dichas discrepancias y obtener una fuente de datos que —con la misma muestra de estrellas— nos permitiese atacar el estudio de la distribución de las velocidades residuales y de los parámetros cinemáticos del movimiento macroscópico de la Galaxia en el entorno del Sol.

En cuanto se refiere al estudio de la distribución de las velocidades residuales, en el apartado III se han calculado los momentos centrados hasta el cuarto orden. Hasta hace poco, únicamente se consideraban los momentos de segundo orden y sólo Charlier (1926) había estimado los momentos hasta el cuarto orden, si bien los datos entonces disponibles eran de menor calidad. Recientemente, Erickson (1975) ha publicado momentos hasta el cuarto orden para el Catálogo de Gliese (1969), y ello nos ha animado a atacar el problema por otro método de cálculo obteniendo plena coincidencia al aplicarlo a su muestra de estrellas, lo cual nos ha permitido extender estos cálculos al Catálogo FK4 (Fricke y Kopff 1963).

Al desarrollo del modelo tridimensional de Ogorodnikov-Milne (véase, por ejemplo, Ogorodnikov 1965) que hemos utilizado para calcular el gradiente del campo galáctico de velocidades, hemos dedicado el apartado IV, sin más hipótesis que la de la aproximación lineal. Para interpretar los valores hallados en función de los parámetros cinemáticos de la Galaxia, necesitamos separar la parte hemisimétrica de dicho gradiente de las correcciones de precesión con las cuales aparece mezclada. Para ello, en lugar de admitir hipótesis de dudosa justificación, hemos preferido adoptar un modelo galáctico.

El modelo galáctico elegido con el fin de paliar el problema expuesto ha sido un modelo isotérmico, el cual se justifica perfectamente en las proximidades del Sol. Dicho modelo se ha desarrollado en el apartado V, planteándose las ecuaciones hidrodinámicas que de él se deducen y que nos han permitido cerrar el problema y calcular los parámetros cinemáticos de la Galaxia en el entorno del Sol, así como las correcciones a la constante de la precesión. La concordancia con otros autores y la coherencia interna de los resultados obtenidos pone de manifiesto la bondad del método de cálculo empleado y la necesidad de atacar los problemas de dinámica galáctica mediante modelos tridimensionales, así como, al propio tiempo, justifica la adopción del citado modelo isotérmico.

II. CATALOGOS Y DATOS UTILIZADOS

Para el estudio que se pretende realizar, necesitamos conjugar el cálculo de los momentos centrados de la distribución de las velocidades residuales en las cercanías del Sol, el cálculo de los parámetros cinemáticos de la Galaxia y el desarrollo de un modelo para la Galaxia cuyos valores en las proximidades del Sol sean compatibles con los experimentales. Para ello necesitamos catálogos que, además de darnos la posición de las estrellas, nos proporcionen los datos suficientes para calcular con la mayor precisión posible la velocidad espacial de las estrellas y nos proporcionen simultaneamente el tipo espectral y la clase de luminosidad de las mismas.

De lo expuesto anteriormente se deduce que debe descartarse el uso de los catálogos con gran número de estrellas: S.A.O. y AGK3, pues no figuran en ellos la distancia ni la velocidad radial de las estrellas. Dada la precisión que se necesita para el presente estudio, hemos adoptado como catálogo básico de estrellas próximas el "Catalogue of Nearby Stars" (Gliese 1969), al cual nos referiremos frecuentemente como "Catálogo de Gliese", y, para las estrellas lejanas, la selección de estrellas distantes de los Catálogos FK4 y FK4 Suppl. Esta selección denominada "512 Distant FK4/FK4 Sup. Stars" (Fricke 1977), contiene la velocidad radial de 500 estrellas, la distancia espectroscópica o fotométrica, el tipo espectral y la clase de luminosidad. A esta selección nos referiremos frecuentemente como "Catálogo de Fricke".

Los motivos para la elección de estos dos catálogos son los siguientes: a) Disponer de una muestra de estrellas próximas que nos permita, por comparación con los resultados de otros autores, comprobar el método de cálculo y confirmar los resultados obtenidos por los demás autores y b) Disponer de una muestra de estrellas alejadas del Sol, a fin de que se note el efecto de la estructura a mayor escala (brazos espirales, etc.).

Las muestras seleccionadas de estos catálogos son: las 500 estrellas del Catálogo de Fricke con suficientes datos para calcular la velocidad espacial y 869 estrellas del Catálogo de Gliese seleccionadas según los criterios de Erickson (1975). Estas 869 estrellas se reducen a 712 cuando se uniformiza la densidad en el catálogo mencionado.

El Catálogo de Fricke tiene como ventajas principales las siguientes: está uniformemente distribuido si se consideran distancias inferiores a 300 parsecs, es representativo del entorno solar observable a más de 100 pc, posee datos astrométricos muy precisos, es muy utilizado en la bibliografía y es válido para el cálculo de la rotación galáctica, la precesión y los momentos a gran distancia. Los inconvenientes de este catálogo son: tiene las estrellas muy concentradas hacia el plano galáctico cuando se consideran sólo las estrellas situadas a más de 300 pc y puede estar además sesgado hacia velocidades residuales bajas, debido a los criterios de selección.

El Catálogo de Gliese tiene como ventajas: está uniformemente distribuido, es representativo del entorno solar a pequeña distancia, posee datos astrométricos precisos, es utilizado por diversos autores y es perfectamente válido para calcular los momentos de la distribución de velocidades a pequeña distancia. Los inconvenientes que presenta este catálogo son: está sesgado hacia velocidades residuales elevadas y no es válido, por la proximidad de las estrellas de este catálogo, para calcular la rotación galáctica.

III. MOMENTOS CENTRADOS DE LA DISTRIBUCION DE VELOCIDADES

Sabido es el interés que para el estudio de una distribución tiene el conocimiento de los distintos momentos de la misma, de los cuales se deduce la media, la desviación típica, la asimetría, la curtosis, etc. El presente apartado estudia la distribución de velocidades en la población de estrellas próximas al Sol mediante la obtención de sus momentos centrados.

Se define el momento centrado de orden n de la distribución de velocidades como:

$$\mu_{\mathrm{n}}(\mathrm{t},r) = \frac{1}{\mathrm{N}(\mathrm{t},r)} \int_{u} u^{\mathrm{n}}\, \mathrm{g}(\mathrm{t},r,u)\, \mathrm{d}u \qquad (1)$$

siendo $u = V - v(\mathrm{t}, r)$ la velocidad residual de la estrella $\mathrm{g}(\mathrm{t}, r, u)$ la función de distribución de la velocidad residual, V la velocidad espacial y N la densidad estelar.

Definamos las siguientes bases de trabajo:

Sea $\mathrm{B}_1 \equiv (\underline{\hat{\rho}}, \underline{\hat{\alpha}}, \underline{\hat{\delta}})$ la base de vectores unitarios tangentes a las líneas coordenadas esféricas de la referencia ecuatorial heliocéntrica, es decir, con $\underline{\hat{\rho}}$ en la dirección de la estrella, $\underline{\hat{\alpha}}$ en el sentido de las ascensiones rectas crecientes y $\underline{\hat{\delta}}$ en el sentido de las declinaciones crecientes. Esta base es la adecuada para expresar la posición, el movimiento propio y la velocidad radial de las estrellas en los Catálogos estelares.

Sea $B_2 \equiv (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ la base ortonormal ecuatorial heliocéntrica, orientada en sentido directo, con $\hat{e}_1$ dirigido hacia el punto Aries y $\hat{e}_2$ hacia el polo Norte ecuatorial. Esta base es la adecuada para expresar parámetros ligados al giro de la Tierra, como ocurre por ejemplo con la precesión.

Sea $B_3 \equiv (\hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3)$ la base ortonormal galáctica heliocéntrica, orientada en sentido directo, con $\hat{g}_1$ dirigido hacia el eje galáctico paralelamente al plano galáctico y $\hat{g}_3$ dirigido hacia el polo norte galáctico. Esta base es la adecuada para expresar parámetros ligados al giro de la Galaxia.

Sea $B_4 \equiv (\underline{\hat{\varpi}}, \underline{\hat{\theta}}, \hat{z})$ la base de vectores unitarios tangentes a las líneas coordenadas cilíndricas, siendo $\underline{\hat{\varpi}} \equiv -\hat{g}_1$, $\underline{\hat{\theta}} \equiv \hat{g}_2$ y $\hat{z} \equiv \hat{g}_3$. Nótese que esta base no está orientada en sentido directo, ya que se ha elegido como sentido de $\underline{\hat{\theta}}$ el comunmente aceptado para la rotación de la Galaxia. Esta base es la adecuada para expresar los movimientos macroscópicos de la Galaxia con respecto a su centro.

La velocidad espacial de la estrella se denota:

$$\nu = \begin{pmatrix} V_\rho \\ k\ \rho\ \mu_\alpha \cos\ \delta \\ k\ \rho\ \mu_\delta \end{pmatrix}_{B_1}$$

cuyas componentes en la base B_3 siguiendo la nomenclatura habitual son:

$$\left.\begin{aligned}
U &= V_\rho \cos\ l\ \cos\ b + k\rho\mu_\alpha \cos\delta(\cos\ l\ \text{sen}\ b\ \text{sen}\phi - \\
&\quad - \text{sen}\ l\ \cos\phi) - k\rho\mu_\delta(\cos\ l\ \text{sen}\ b\ \cos\phi + \\
&\quad + \text{sen}\ l\ \text{sen}\phi) \\
V &= V_\rho\ \text{sen}\ l\ \cos\ b + k\rho\mu_\alpha\cos\delta(\text{sen}\ l\ \text{sen}\ b\ \text{sen}\phi + \\
&\quad + \cos\ l\ \cos\phi) - k\rho\mu_\delta\ (\text{sen}\ l\ \text{sen}\ b\ \cos\phi - \\
&\quad - \cos\ l\ \text{sen}\phi) \\
W &= V_\rho\ \text{sen}\ b - k\rho\mu_\alpha\cos\delta\ \cos\ b\ \text{sen}\phi + \\
&\quad + k\rho\mu_\delta\cos\ b\ \cos\phi
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

a) *Método estadístico*

Conocidas en la base B_3 las componentes (2) de la velocidad de cada estrella de la muestra, para el cálculo de los distintos momentos centrados de la población, expresamos en forma discreta el tensor (1). En este caso, si a, b, c, denotan el número de veces que cada componente de la velocidad aparece en el índice del tensor, tenemos:

$$\mu_n\Big]_{a,b,c} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} (U_i - U_o)^a (V_i - V_o)^b (W_i - W_o)^c \tag{3}$$

donde U_0, V_0, W_0 son las medias de la muestra que nos dan el movimiento del centroide con respecto al Sol y son reflejo del movimiento solar, y K el número de estrellas de la muestra.

Es evidente que para poder valorar los resultados que se obtengan mediante la expresión (3), es preciso calcular también los errores con que estos momentos pueden conocerse.

Para el cálculo de las varianzas de los momentos hemos utilizado las expresiones (4), (5) y (6). La deducción de las expresiones para las varianzas (4) y (5) se ha efectuado a partir de las expresiones dadas por Kaplan (1952) para las covarianzas de los cumulantes de una distribución. Esto es posible dada la coincidencia de los cumulantes y los momentos hasta el tercer orden. La deducción de la expresión para las varianzas de los momentos de cuarto orden (6) se ha efectuado generalizando las obtenidas para los órdenes 2o. y 3o. Erickson (1975) utiliza directamente las expresiones de Kaplan, para lo cual hace un paso intermedio mediante cumulantes. Por otra parte, dicho autor considera también los errores observacionales, de los cuales hemos prescindido al no conocerse éstos para el Catálogo de Fricke.

La coincidencia de nuestros resultados con los de Erickson en su misma muestra, prueba la bondad del método utilizado, así como la posibilidad de prescindir de los errores observacionales sin gran merma de precisión.

Las expresiones de las varianzas de los momentos centrados con la notación ijkl. . . siguiente, son:

$$\mu_n\Big]_{a,b,c} = \mu_{1,1,\overset{a)}{\ldots},1,2,2,\overset{b)}{\ldots},2,3,3,\overset{c)}{\ldots},3} \quad ;$$

por ejemplo: $\mu_{121} = \mu_{1223}$ ó $\mu_{234} = \mu_{112223333}$.

Orden 2:

$$\mathrm{var}\ \mu_{ij} = \frac{1}{K}\ \mu_{ijij} + \mu_{ij}^2\left(\frac{1}{K-1} - \frac{2}{K}\right) + \mu_{ii}\mu_{jj}\left(\frac{1}{K-1} - \frac{1}{K}\right) ,$$

siendo K el número de estrellas de la muestra. Si K es grande esta expresión puede aproximarse por:

$$\mathrm{var}\ \mu_{ij} = \frac{1}{K}\left(\mu_{ijij} - \mu_{ij}^2\right) . \tag{4}$$

Orden 3:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\ \mu_{ijk} = {} & \frac{1}{K}\,\mu_{ijkijk} + \left(\frac{2}{K-1} - \frac{4}{K}\right)(\mu_{iijk}\mu_{jk} + \mu_{ijjk}\mu_{ik} + \mu_{ijkk}\mu_{ij}) + \left(\frac{1}{K-1} - \frac{1}{K}\right)(\mu_{iijj}\mu_{kk} + \mu_{iikk}\mu_{jj} + \\ & + \mu_{jjkk}\mu_{ii}) + \left(\frac{3}{K-1} - \frac{4}{K}\right)\mu_{ijk}^2 + \left(\frac{2}{K-1} - \frac{2}{K}\right)(\mu_{iij}\mu_{jkk} + \mu_{ijj}\mu_{ikk} + \mu_{iik}\mu_{jjk}) + \\ & + \left(\frac{2}{K} - \frac{3}{K-1} + \frac{K}{(K-1)(K-2)}\right)\mu_{ii}\mu_{jj}\mu_{kk} + \left(\frac{4}{K} - \frac{4}{K-1} + \frac{K}{(K-1)(K-2)}\right)(\mu_{ii}\mu_{jk}^2 + \\ & + \mu_{jj}\mu_{ik}^2 + \mu_{kk}\mu_{ij}^2) + \left(\frac{16}{K} - \frac{12}{K-1} + \frac{2K}{(K-1)(K-2)}\right)\mu_{ij}\mu_{ik}\mu_{jk} \ ;\end{aligned}$$

cuya expresión aproximada por K grande es:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\ \mu_{ijk} = \frac{1}{K}\Big[& \mu_{ijkijk} - 2(\mu_{iijk}\mu_{jk} + \mu_{ijjk}\mu_{ik} + \mu_{ijkk}\mu_{ij}) - \mu_{ijk}^2 + (\mu_{ii}\mu_{jk}^2 + \mu_{jj}\mu_{ik}^2 + \\ & + \mu_{kk}\mu_{ij}^2) + 6\mu_{ij}\mu_{ik}\mu_{jk}\Big] .\end{aligned} \tag{5}$$

Orden 4:

La expresión de la fórmula aproximada para el cuarto orden es la siguiente:

$$\mathrm{var}\ \mu_{ijkl} = \frac{1}{K}\mu_{ijklijkl} - \frac{1}{K}\mu_{ijkl}^2 - \frac{2}{K}(\mu_{iijkl}\mu_{jkl} + \mu_{ijjkl}\mu_{ikl} + \mu_{ijkkl}\mu_{ijl} + \mu_{ijkll}\mu_{ijk}) +$$

$$+ \frac{1}{K}(\mu_{ii}\mu^2_{jkl}+\mu_{jj}\mu^2_{ikl}+\mu_{kk}\mu^2_{ijl}+\mu_{ll}\mu^2_{ijk}) + \frac{1}{K}(\mu_{ij}\mu_{ijk}\mu_{kkl}+\mu_{ij}\mu_{ijl}\mu_{kkl}+\mu_{ik}\mu_{ikl}\mu_{jjl}+$$

$$+\mu_{ik}\mu_{ijk}\mu_{jll}+\mu_{il}\mu_{ijl}\mu_{jkk}+\mu_{il}\mu_{ikl}\mu_{jjk}+\mu_{jk}\mu_{ijk}\mu_{ill}+\mu_{jk}\mu_{jkl}\mu_{iil}+\mu_{jl}\mu_{ijl}\mu_{ikk}+$$

$$+\mu_{jl}\mu_{jkl}\mu_{iik}+\mu_{kl}\mu_{ikl}\mu_{ijj}+\mu_{kl}\mu_{jkl}\mu_{iij}) \; . \tag{6}$$

Para los cálculos, en lugar de aplicar las fórmulas exactas se han utilizado las fórmulas aproximadas, después de comprobar para cada orden la prácticamente nula diferencia entre los resultados de ambas expresiones.

b) *Resultados*

Los cálculos que se presentan se han efectuado con las muestras siguientes y los resultados figuran en la Tabla 1 :

1. Catálogo de Gliese con densidad uniforme de 0.016 pc^{-3} (712 estrellas).
2. Catálogo de Fricke muestra completa de 500 estrellas.
3. Catálogo de Fricke, estrellas de tipos espectrales A-M (222 estrellas).

Resultados obtenidos con otras muestras de estos mismos catálogos, así como una discusión general de los valores de los momentos centrados pueden encontrarse en Núñez y Torra (1980*a*; 1982).

En primer lugar, vemos que muchos de los momentos calculados son bastante mayores que sus errores, lo cual prueba que momentos de orden tan elevado como el cuarto pueden ser calculados con suficiente exactitud.

Una rápida ojeada a los valores obtenidos muestra grandes diferencias entre los grupos 1, 2 y 3. Estas diferencias se interpretan en función de la relación cinemática-edad de las estrellas. En efecto, esta relación empírica proviene del hecho observacional de que la distribución de velocidades de un grupo de estrellas está íntimamente relacionada con su tipo espectral. En particular, los semiejes del elipsoide de velocidades residuales tienden a crecer al tratar con tipos espectrales cada vez más tardíos. En nuestro caso, se ve inmediatamente que los valores del grupo 1 son mayores que los del grupo 2. Esto era de esperar, puesto que el grupo 1 está formado por estrellas del Catálogo de Gliese, las cuales son principalmente de los tipos A-M de la secuencia principal, mientras que la muestra de 500 estrellas del Catálogo de Fricke posee un elevado porcentaje de estrellas de los tipos espectrales tempranos, las cuales poseen menor dispersión. Este mismo efecto se presenta al observar los resultados del grupo 3, el cual, a pesar de estar excluidas las estrellas de los tipos O-B, sigue poseyendo una importante parte de estrellas supergigantes y gigantes. Estos resultados confirman, una vez más, la relación existente entre las propiedades cinemáticas de los distintos grupos y el tipo espectral y la clase de luminosidad de las estrellas

Comparando nuestros resultados con los de otros autores, vemos que es prácticamente total la concordancia existente entre los valores obtenidos por Erickson (1975) y los obtenidos en el grupo 1, lo cual prueba la bondad del método de cálculo utilizado y de las expresiones (4), (5) y (6). Los resultados de Gómez (1974) son comparables por su naturaleza al grupo 3. La comparación es ahora menos sencilla dado el pequeño tamaño de las muestras que dicho autor emplea; a pesar de ello, se observa una buena concordancia con nuestros valores.

Estudiando el grupo 1, vemos que cuando consideramos estrellas próximas, la ley normal no se verifica para esta distribución de velocidades puesto que aparecen momentos de tercer orden no nulos y el momento μ_{110}, el cual provoca la desviación del vértex. Por otra parte Orús (1975) ha demostrado que la distribución de velocidades no puede ser cuadrática en las velocidades residuales si se adoptan los valores de Erickson, equivalentes a los de nuestro grupo 1. Sin embargo, el grupo 3 de estrellas lejanas no presenta desviación del vértex, al ser μ_{110} nulo, ni momentos de tercer orden. Por tanto, excepto a lo que al valor de μ_{101} (que representa la desviación del eje del elipsoide respecto del plano galáctico) se refiere, la distribución de velocidades residuales de las estrellas alejadas del entorno solar es compatible con la ley normal, mientras se desvía considerablemente de ella para las estrellas próximas.

Ambos grupos 1 y 3 son compatibles, sin embargo, con las simetrías comunmente supuestas para la Galaxia, excepto en cuanto se refiere a los momentos μ_{110} y μ_{101}. En efecto, según estas simetrías, sólo pueden ser no nulos los momentos: μ_{200}, μ_{020}, μ_{002}, μ_{210}, μ_{030}, μ_{012}, μ_{400}, μ_{220}, μ_{202}, μ_{040}, μ_{022} y μ_{004}, lo cual se ajusta a los resultados obtenidos.

TABLA 1

MOMENTOS CENTRADOS DE LA DISTRIBUCION DE VELOCIDADES Y SUS ERRORES ESTANDAR. U_0, V_0, W_0 SON LAS MEDIAS DE LA MUESTRA. LA PRIMERA COLUMNA INDICA LAS COMPONENTES DEL TENSOR.

	Muestra 1		Muestra 2		Muestra 3	
U_o	-10.3±	1.4	-9.8±	0.7	-8.1±	1.2
V_o	-20.5	0.9	-12.1	0.7	-9.7	0.9
W_o	-7.6	0.7	-7.6	0.7	-5.9	0.8
μ_{200}	1 310±	80	270±	50	330±	90
μ_{110}	105	45	20	30	-40	50
μ_{020}	600	45	220	50	160	30
μ_{101}	10	30	30	30	50	20
μ_{011}	20	20	-60	60	-10	10
μ_{002}	340	25	220	80	140	20
μ_{300}	-4 600±	6 500	-6 200±	4 800	-13 300±	10 000
μ_{210}	-13 200	3 200	4 100	3 000	6 500	6 000
μ_{120}	1 500	2 800	950	3 600	-4 100	3 800
μ_{030}	-14 400	2 700	7 300	6 800	2 900	2 300
μ_{201}	2 900	2 300	-1 600	1 800	- 900	500
μ_{111}	- 900	1 400	-4 100	4 100	200	400
μ_{021}	- 200	1 500	-9 100	8 800	- 200	300
μ_{102}	-1 400	1 200	5 800	5 500	400	600
μ_{012}	-2 600	900	11 600	11 900	- 100	300
μ_{003}	900	1 200	-15 300	15 600	- 200	800
μ_{400}	6 710 000±	1 000 000	1 120 000±	600 000	1 800 000±	1 300 000
μ_{310}	370 000	370 000	- 250 000	360 000	- 850 000	800 000
μ_{220}	1 470 000	280 000	500 000	320 000	550 000	490 000
μ_{130}	-70 000	260 000	350 000	500 000	- 350 000	310 000
μ_{040}	1 760 000	290 000	1 300 000	1 000 000	270 000	200 000
μ_{301}	-60 000	310 000	-70 000	140 000	80 000	40 000
μ_{211}	-40 000	130 000	- 290 000	290 000	-25 000	20 000
μ_{121}	40 000	110 000	- 620 000	630 000	20 000	20 000
μ_{031}	60 000	130 000	1 400 000	1 400 000	-16 000	20 000
μ_{202}	770 000	120 000	450 000	380 000	70 000	20 000
μ_{112}	10 000	60 000	850 000	830 000	-20 000	15 000
μ_{022}	370 000	70 000	1 900 000	1 820 000	30 000	10 000
μ_{103}	40 000	70 000	- 990 000	1 100 000	25 000	25 000
μ_{013}	40 000	60 000	-2 400 000	2 400 000	-20 000	10 000
μ_{004}	570 000	110 000	3 350 000	3 200 000	130 000	45 000

Unidades: $km^n\ s^{-n}$ para el orden n.
Explicación de las muestras en el texto.

Dados los valores obtenidos en los grupos 1 y 3 para los momentos μ_{110} y μ_{101}, podemos deducir que al alejarnos del Sol va disminuyendo la influencia de las estrellas cercanas, que provocan la desviación del vértex, apareciendo la desviación en dirección del plano galáctico. Núñez y Torra (1982) han mostrado que la desviación del vértex varía fuertemente según el hemisferio, manteniéndose los demás momentos, lo cual confirma la localidad de dicha desviación.

A la vista de lo expuesto, vamos a elegir el grupo 3 como el más representativo del entorno solar para los estudios posteriores.

IV. ANALISIS CINEMATICO DEL CAMPO DE VELOCIDADES

a) *Modelo tridimensional*

Clásicamente, el estudio del campo galáctico de velocidades se había realizado mediante un modelo plano, bidimensional, de Oort-Lindblad (véase, por ejemplo, Oort 1965). De forma casi simultánea, Ogorodnikov (1932) e independientemente Milne (1935) desarrollaron el modelo tridimensional, llamado de Ogorodnikov-Milne, que fué aplicado por primera vez por Clube (1972, 1973, 1974) a los movimientos propios de las estrellas del FK4, del AGK3 y del programa piloto de Lick. Posteriormente, Rius (1974), Du mont (1977), Núñez (1977) y Núñez y Torra (1980*b*) han considerado este modelo siendo sus resultados bastante concordantes entre sí y radicalmente distintos de los de Clube. Veamos el desarrollo de este modelo tridimensional a fin de calcularlo con la misma muestra de estrellas con la cual hemos calculado los momentos centrados de la distribución de velocidades.

Como es sabido, el efecto de la precesión sobre la ascensión recta y declinación de las estrellas se expresa:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\alpha} = \mathrm{m} + \mathrm{n} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \delta + \mu_\alpha \\ \dot{\delta} = \mathrm{n} \cos \alpha + \mu_\delta\end{array}\right\} , \tag{7}$$

donde:

$$\mathrm{m} = \mathrm{p}_1 \cos \epsilon - \lambda$$

$$\mathrm{n} = \mathrm{p}_1 \operatorname{sen} \epsilon \ .$$

Un relativo desconocimiento de la precesión conlleva la no inercialidad del sistema. Hasta la fecha, los sistemas que más se asemejan a los inerciales son los sistemas fundamentales, basados en los movimientos propios de las estrellas de nuestra Galaxia y deducidos a partir de valores previos de las constantes de la precesión.

Supongamos un sistema inercial galactocéntrico. La velocidad de una estrella se expresa:

$$V = V_\odot + V^{\mathrm{F}} + CP \ , \tag{8}$$

siendo V la velocidad de la estrella en el referido sistema inercial, $V_\odot$ la velocidad del Sol en este mismo sistema, V^{F} la velocidad heliocéntrica de la estrella en un sistema fundamental y CP las correcciones de precesión.

Teniendo en cuenta las correcciones de precesión expresada en (7), si debido a éstas, m y n han de corregirse en Δm y Δn, tenemos:

$$\Delta\mu_\alpha = -\Delta \mathrm{k} - \Delta \mathrm{n} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \delta$$

$$\Delta\mu_\delta = -\Delta \mathrm{n} \cos \alpha \ ,$$

siendo $\Delta \mathrm{k} = \Delta \mathrm{m} - \Delta \mathrm{e}$, es decir, introduciendo la pequeña corrección Δe producida por el movimiento del equinoccio (Fricke 1977).

Las correcciones de precesión pueden expresarse entonces:

$$CP = \underline{\omega}^{\mathrm{F}} \wedge \underline{\rho} \qquad \underline{\omega}^{\mathrm{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \mathrm{n} \\ -\Delta \mathrm{k} \end{bmatrix}_{\mathrm{B}_2} , \tag{9}$$

donde ρ es el vector de posición ecuatorial de la estrella.

Introduciendo ahora la velocidad media v del centroide, la residual u de la estrella y admitiendo la aproximación lineal, reducimos el problema de conocer el campo de velocidades al de conocer su diferencial. Desarrollando éste en sus partes simétrica $\mathrm{S}(r_\odot)$ y hemisimétrica $\mathrm{H}(r_\odot)$ la expresión (8) adquiere la forma de las ecuaciones de condición siguientes:

$$V^{\mathrm{F}} = -u_\odot + \underline{\omega} \wedge \underline{\rho} + \mathrm{S}(r_\odot)\,\underline{\rho} \tag{10}$$

siendo:

$$\mathrm{H}(r_\odot)\,\underline{\rho} = \underline{\Omega} \wedge \underline{\rho} \qquad \underline{\omega} = \underline{\Omega} - \underline{\omega}^{\mathrm{F}} \ .$$

La ecuación (10) es vectorial por lo que a partir de los datos de un catálogo fundamental se obtendrá para cada estrella un sistema de tres ecuaciones escalares de condición (una para cada componente), siendo las incógnitas: las componentes de los vectores $\underline{u}_{\odot}$ y $\underline{\omega}$ y las del tensor simétrico $S(r_{\odot})$.

Obsérvese que $\underline{\Omega}$ y $\underline{\omega}^F$ aparecen mezclados con $\underline{\omega}$ con lo cual el conocimiento mediante (10) de $\underline{\omega}$ no es suficiente para conocer $\underline{\Omega}$, Δn y Δk, necesitándose plantear nuevas hipótesis. Igualmente, $\underline{\omega}$ no aparece al proyectar las ecuaciones en dirección radial. Además, cuando sólo se consideran ecuaciones de movimientos propios, la diagonal principal de $S(r_{\odot})$ queda determinada salvo una constante aditiva común a todas sus componentes.

La expresión de la velocidad media es:

$$v = \begin{bmatrix} \Pi(\varpi,\theta,z) \\ \Theta(\varpi,\theta,z) \\ Z(\varpi,\theta,z) \end{bmatrix}_{B_4} , \tag{11}$$

y la del diferencial:

$$Dv(r_{\odot}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Pi}{\partial\varpi} & -\frac{1}{\varpi}\frac{\partial\Pi}{\partial\theta} + \frac{\Theta}{\varpi} & -\frac{\partial\Pi}{\partial z} \\ -\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} & \frac{1}{\varpi}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} + \frac{\Pi}{\varpi} & \frac{\partial\Theta}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial\varpi} & \frac{1}{\varpi}\frac{\partial Z}{\partial\theta} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{bmatrix}_{B_3} .$$

Dado que las partes simétrica y hemisimétrica del diferencial se denotan:

$$S(r_{\odot}) = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}_{B_3} \qquad H(r_{\odot}) = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}_{B_3} ,$$

identificando:

$$Dv(r_{\odot}) \equiv S(r_{\odot}) + H(r_{\odot}) \quad ;$$

se tiene:

$$\left.\begin{array}{lll} S_{11} = \frac{\partial\Pi}{\partial\varpi} & S_{12} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} - \frac{\Theta}{\varpi} + \frac{1}{\varpi}\frac{\partial\Pi}{\partial\theta}\right) & S_{13} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial\varpi}\right) \\ S_{22} = \frac{1}{\varpi}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} + \frac{\Pi}{\varpi} & S_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \frac{1}{\varpi}\frac{\partial Z}{\partial\theta}\right) & S_{33} = \frac{\partial Z}{\partial z} \\ \Omega_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{1}{\varpi}\frac{\partial Z}{\partial\theta}\right) & \Omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial\varpi} - \frac{\partial\Pi}{\partial z}\right) & \Omega_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} + \frac{\Theta}{\varpi} - \frac{1}{\varpi}\frac{\partial\Pi}{\partial\theta}\right) \end{array}\right\} , \tag{12}$$

ecuaciones que nos relacionan los valores de S_{ij} y Ω_i con los parámetros cinemáticos de la Galaxia. Nótese que en el modelo plano de Oort-Lindblad, donde (11) se reduce a $\nu = [0, \Theta(\varpi), 0]$, resulta $S_{11} = S_{13} = S_{22} = S_{23} = S_{33} = 0$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$,

$$S_{12} = -\frac{1}{2} = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} - \frac{\Theta}{\varpi}\right) \equiv A \quad y \quad \Omega_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} + \frac{\Theta}{\varpi}\right) \equiv B \ .$$

Dado que (10) nos proporciona el vector $\underline{\omega}$ pero no $\underline{\Omega}$ y $\underline{\omega}^F$, teniendo en cuenta que $\underline{\omega}$ y $\underline{\omega}^F$ nos interesan en la base B_2 y $\underline{\Omega}$ en la base B_3, la relación $\underline{\omega} = \underline{\Omega} - \underline{\omega}^F$ se denota:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}_{B_2} = {}_2C^3 \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix}_{B_3} - \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta n \\ -\Delta k \end{bmatrix}_{B_2} ,$$

donde ${}_2C^3$ es la matriz de cambio de base de B_3 a B_2. Desarrollando estas expresiones se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= -0.0670\ \Omega_1 + 0.4927\ \Omega_2 - 0.8676\ \Omega_3 \\ \omega_2 &= -0.8728\ \Omega_1 - 0.4503\ \Omega_2 - 0.1884\ \Omega_3 - \Delta n \\ \omega_3 &= -0.4835\ \Omega_1 + 0.7446\ \Omega_2 + 0.4602\ \Omega_3 + \Delta k \end{aligned}\right\} . \qquad (13)$$

La resolución del sistema (10) junto con las relaciones (12) y (13) nos permitirá el cálculo de los parámetros cinemáticos de la Galaxia, si bien ya se ve que al formar (13) un sistema de tres ecuaciones con cinco incógnitas, serán necesarias nuevas ecuaciones.

b) *Ecuaciones de condición*

Para la resolución del sistema de ecuaciones (10) hemos de expresar en forma explícita dicho sistema, expresándolas en la base B_1 en la cual viene dado V^F. Efectuando los cambios de base necesarios, el sistema (10) se transforma en las expresiones (14), (15) y (16). Nótese que en estas expresiones se han agrupado las incógnitas del modo: $S_{11} - S_{33}$; $S_{22} - S_{33}$ y S_{33} ya que, como se ha dicho, la diagonal principal de $S(r_\odot)$ queda indeterminada cuando sólo se consideran las ecuaciones en movimientos propios (15) y (16).

En las ecuaciones (14), (15) y (16) X, Y, Z denotan las componentes de $u_\odot$ en la base B_2. La resolución de las ecuaciones de condición se ha realizado por el método de los cuadrados mínimos.

c) *Resultados obtenidos*

Se ha aplicado el método de los cuadrados mínimos a los sistemas de ecuaciones formados por V_ρ; μ_δ; $\mu_\alpha + \mu_\delta$; $V_\rho + \mu_\alpha + \mu_\delta$. Los dos primeros sistemas son, respectivamente, de 9 y 10 incógnitas, el tercero es de 11 y sólamente el cuarto sistema (solución combinada total) nos proporciona las 12 incógnitas. Se podría haber formado un sistema de 10 incógnitas a partir de μ_α, pero es fácil demostrar, expresando $S(r_\odot)$ en la base B_2, que el rango del sistema es sólamente 7 en lugar de 10.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} V_\rho = \frac{1}{\rho}(&-\cos\alpha \cos\delta\ X - \operatorname{sen}\alpha \cos\delta\ Y - \operatorname{sen}\delta\ Z) + \cos^2 b \cos^2 l (S_{11} - S_{33}) + \cos^2 b \operatorname{sen} 2l\ S_{12} + \\ &+ \operatorname{sen} 2b \cos l\ S_{13} + \cos^2 b \operatorname{sen}^2 l (S_{22} - S_{33}) + \operatorname{sen} 2b \operatorname{sen} l\ S_{23} + S_{33} \end{aligned} \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned}\mu_\alpha \cos\delta = {} & \frac{1}{\rho}(\operatorname{sen}\alpha\ X-\cos\alpha\ Y)-\cos\alpha\ \operatorname{sen}\delta\ \omega_1 -\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\delta\ \omega_2+\cos\delta\ \omega_3+ \\ & +\frac{1}{2}(\cos^2 l\ \operatorname{sen} 2b\ \operatorname{sen}\phi-\operatorname{sen} 2l\ \cos b\ \cos\phi)(S_{11}-S_{33})+(\cos 2l\ \cos b\ \cos\phi+ \\ & +\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2l\ \operatorname{sen} 2b\ \operatorname{sen}\phi)S_{12} -(\cos l\ \cos 2b\ \operatorname{sen}\phi+\operatorname{sen} l\ \operatorname{sen} b\ \cos\phi)S_{13}+ \\ & +\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2l\ \cos b\ \cos\phi+\operatorname{sen}^2 l\ \operatorname{sen} 2b\ \operatorname{sen}\phi)(S_{22}-S_{33})+ \\ & +(\cos l\ \operatorname{sen} b\ \cos\phi-\operatorname{sen} l\ \cos 2b\ \operatorname{sen}\phi)S_{23}\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned}\mu_\delta = {} & \frac{1}{\rho}(\cos\alpha\ \operatorname{sen}\delta\ X+\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\delta\ Y-\cos\delta\ Z) +\operatorname{sen}\alpha\ \omega_1-\cos\alpha\ \omega_2- \\ & -\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2l\ \cos b\ \operatorname{sen}\phi+\cos^2 l\ \operatorname{sen} 2b\ \cos\phi)(S_{11}-S_{33}) +(\cos 2l\ \cos b\ \operatorname{sen}\phi - \\ & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2l\ \operatorname{sen} 2b\ \cos\phi)S_{12} +(\cos l\ \cos 2b\ \cos\phi-\operatorname{sen} l\ \operatorname{sen} b\ \operatorname{sen}\phi)S_{13}+ \\ & +\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2l\ \cos b\ \operatorname{sen}\phi-\operatorname{sen}^2 l\ \operatorname{sen} 2b\ \cos\phi)(S_{22}-S_{33}) +(\operatorname{sen} l\ \cos 2b\ \cos\phi+ \\ & +\cos l\ \operatorname{sen} b\ \operatorname{sen}\phi)S_{23}\ .\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Du Mont (1975) adopta para (15) la forma de la ecuación en el modelo plano de Oort-Lindblad, ignorando los demás términos. Creemos que este proceder no es correcto puesto que luego se interpretan los resultados a la luz del modelo tridimensional, utilizando además la ecuación completa (15) para las soluciones combinadas. En nuestro caso hemos preferido emplear la ecuación completa para las soluciones combinadas, prescindiendo de la solución individual de la misma.

Las soluciones que se han obtenido figuran en la Tabla 2 en la cual los grupos utilizados –todos ellos pertenecientes al Catálogo de Fricke y respetando la numeración del apartado segundo– son:

2. Muestra completa de 500 estrellas.
3. Estrellas de tipos espectrales A-M (222 estrellas).
4. Estrellas de tipos espectrales O-B (278 estrellas).

Se ha dado igual peso a todas las ecuaciones en las soluciones combinadas y las distancias publicadas en el Catálogo, sin utilizar distancias promediadas o factores paralácticos. Las covarianzas de la solución combinada total del grupo 3 se encuentran en la Tabla 3.

La interpretación de los resultados ha de efectuarse a través de los sistemas (12) y (13) por lo que necesitamos nuevas hipótesis. Sin embargo, podemos hacer una pequeña discusión tendiente a elegir el grupo de resultados que utilizaremos para el resto de los cálculos.

Si se comparan las distintas soluciones dentro de cada grupo, se observan discrepancias entre unas y otras; además sólo la solución combinada total nos proporciona todas las incógnitas, con lo que vamos a elegir estas soluciones como las que mejor resumen el comportamiento del sistema. En cuanto se refiere a la comparación de los distintos grupos entre sí, se observan diferencias debido a la distinta composición de las muestras en lo que atañe al tipo espectral. Creemos que el grupo que debe considerarse es el grupo 3, por ser su composición la que más se asemeja a la población predominante de la Galaxia en las proximidades del Sol.

Con respecto al movimiento solar, una vez transformado a las unidades km s^{-1} kpc^{-1} y a la base B_3, se obtiene para el grupo tercero $u_\odot = (-U_0\ , -V_0\ , -W_0\ ) = (6.0 \pm 0.5,\ 8.3 \pm 0.5,\ 5.3 \pm 0.5)$. Denotaremos $u_\odot$, $v_\odot$, $w_\odot$ a estas componentes cuyos valores están en buena concordancia con los obtenidos en el capítulo anterior y los determinados por otros autores.

TABLA 2

RESULTADOS DE LA RESOLUCION POR MINIMOS CUADRADOS DE LAS ECUACIONES DE CONDICION (14), (15) Y (16). EN LAS SOLUCIONES COMBINADAS SE HA DADO EL MISMO PASO A TODAS LAS ECUACIONES. UNIDADES: ''/siglo.

Muestra 2	V_ρ	μ_δ	$\mu_\alpha+\mu_\delta$	$V_\rho+\mu_\alpha+\mu_\delta$
X	0.00±0.01	-0.04±0.01	-0.02±0.01	-0.01±0.01
Y	-0.36 0.01	-0.25 0.01	-0.24 0.01	-0.28 0.01
Z	0.19 0.01	0.13 0.01	0.13 0.01	0.16 0.01
$S_{11}-S_{33}$	-0.46 0.21	-0.48 0.27	-0.15 0.13	-0.22 0.11
S_{12}	0.20 0.08	0.20 0.10	0.34 0.05	0.30 0.05
S_{13}	-0.20 0.11	-0.33 0.14	0.16 0.06	0.05 0.06
$S_{22}-S_{33}$	-0.42 0.20	0.35 0.22	0.38 0.13	0.02 0.11
S_{23}	0.06 0.11	-0.34 0.13	0.13 0.06	0.09 0.06
S_{33}	0.69 0.16	---- ----	---- ----	0.39 0.09
ω_1	---- ----	0.18 0.06	0.31 0.04	0.31 0.05
ω_2	---- ----	-0.45 0.07	-0.34 0.05	-0.34 0.06
ω_3	---- ----	---- ----	-0.24 0.05	-0.27 0.05
Muestra 3				
X	-0.02±0.02	-0.06±0.02	-0.02±0.01	-0.02±0.01
Y	-0.31 0.02	-0.17 0.02	-0.16 0.01	-0.21 0.01
Z	0.13 0.02	0.10 0.01	0.10 0.01	0.12 0.01
$S_{11}-S_{33}$	-0.89 0.36	-0.49 0.45	0.18 0.22	-0.23 0.20
S_{12}	0.27 0.16	0.16 0.19	0.49 0.10	0.38 0.09
S_{13}	-0.60 0.20	-0.17 0.33	0.17 0.10	-0.13 0.10
$S_{22}-S_{33}$	-0.51 0.34	-0.17 0.35	0.25 0.21	-0.06 0.19
S_{23}	0.04 0.17	-0.49 0.20	0.00 0.11	0.01 0.09
S_{33}	0.62 0.25	---- ----	---- ----	0.19 0.15
ω_1	---- ----	0.01 0.10	0.12 0.08	0.18 0.09
ω_2	---- ----	-0.48 0.11	-0.35 0.09	-0.32 0.10
ω_3	---- ----	---- ----	-0.26 0.08	-0.27 0.10
Muestra 4				
X	0.00±0.02	-0.03±0.01	-0.01±0.01	-0.01±0.01
Y	-0.36 0.01	-0.24 0.01	-0.23 0.01	-0.28 0.01
Z	0.19 0.01	0.13 0.01	0.13 0.01	0.16 0.01
$S_{11}-S_{33}$	-0.42 0.26	-0.29 0.34	0.04 0.16	-0.08 0.14
S_{12}	0.20 0.11	0.23 0.13	0.39 0.07	0.32 0.06
S_{13}	-0.26 0.14	-0.41 0.17	0.14 0.08	0.01 0.07
$S_{22}-S_{33}$	-0.34 0.26	0.67 0.26	0.70 0.16	0.23 0.14
S_{23}	0.06 0.14	-0.37 0.16	0.16 0.08	0.11 0.07
S_{33}	0.71 0.19	---- ----	---- ----	0.32 0.12
ω_1	---- ----	0.16 0.07	0.30 0.06	0.32 0.06
ω_2	---- ----	-0.45 0.08	-0.35 0.07	-0.34 0.07
ω_3	---- ----	---- ----	-0.30 0.06	-0.32 0.07

TABLA 3

COVARIANZAS DE LA SOLUCION COMBINADAS DE LA MUESTRA 3

X	Y	$S_{11}-S_{33}$	S_{12}	S_{13}	$S_{22}-S_{33}$	S_{23}	ω_1	ω_2	ω_3	Z	S_{33}	
1.00	0.00	0.15	-0.02	0.00	0.21	-0.01	0.00	0.17	0.07	0.00	-0.19	X
	1.00	0.05	-0.11	-0.14	-0.01	-0.09	-0.17	-0.01	-0.09	0.00	-0.05	Y
		1.00	-0.01	0.00	0.59	-0.02	0.04	-0.03	0.07	-0.07	-0.75	$S_{11}-S_{33}$
			1.00	0.01	-0.01	0.13	-0.12	0.04	0.10	-0.06	0.01	S_{12}
				1.00	-0.04	0.00	0.07	-0.05	0.09	-0.09	0.06	S_{13}
					1.00	-0.06	0.04	-0.02	0.03	0.00	-0.79	$S_{22}-S_{33}$
						1.00	-0.14	0.28	0.14	0.16	0.05	S_{23}
							1.00	-0.12	0.06	-0.09	-0.04	ω_1
								1.00	0.00	0.10	0.03	ω_2
									1.00	0.00	-0.04	ω_3
										1.00	0.11	Z
											1.00	S_{33}

La constante de Oort generalizada $A \equiv S_{12}$, una vez reducida a las unidades habituales, resulta valer A = 18 km s^{-1} kpc^{-1} para el grupo 3, resultando 14.2 y 9.5 km s^{-1} kpc^{-1} para los grupos 2 y 4, respectivamente. El valor del grupo 2 es muy próximo al valor estándar de 15 km s^{-1} kpc^{-1} puesto que la muestra 2 es representativa de la totalidad del Catálogo FK4/FK4 Suppl. habitualmente utilizado para calcularla. Sin embargo, vamos a adoptar el valor de la solución 3 por ser el obtenido con la muestra a considerar. Dicho valor es bastante próximo al publicado por Asteriadis (1977) para estrellas de tipo espectral similar.

d) *Correcciones a la constante de precesión*

El método más sencillo para resolver los istemas (12) y (13) es operar primero con el (13) llevar los resultados al (12). Sin embargo, para resolver el sistema (13) hemos de recurrir a nuevas hipótesis o ecuaciones. La adopción del modelo plano soslaya el problema puesto que $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ y el sistema es resoluble. La adopción de la simetría cilíndrica simplifica en parte el problema pues, en este caso, $\Omega_1 = - S_{2\,3}$, si bien aún haría falta otra hipótesis.

Otra manera de proceder consiste en tratar de obtener valores para las correcciones de precesión Δn y Δk. En 1976 la Unión Astronómica Internacional ha adoptado un nuevo sistema de constantes astronómicas (Lederle 1980) entre las que se encuentran las Δn y Δk propuestas por Fricke (1977); (una revisión de los métodos y resultados de Fricke puede encontrarse asimismo en ese importante trabajo).

TABLA 4

CORRECCIONES A LA CONSTANTE DE LA PRECESION OBTENIDAS POR EL ANALISIS DE LOS MOVIMIENTOS PROPIOS DE LAS ESTRELLAS DE LOS CATALOGOS FUNDAMENTALES

Sistema	Δn ("/siglo)	Δk ("/siglo)	Referencia
FK3/N30	0.30 ± 0.10	− 0.40 ± 0.10	Morgan-Oort (1951)
Auwers/PGC/FK3	0.43 ± 0.10	− 0.24 ± 0.10	Gordon (1952)
FK4/N30	0.44 ± 0.06	− 0.19 ± 0.09	Fricke (1967 a,b)
AGK3 (prel.)	0.51 ± 0.01	− 0.32 ± 0.01	Dieckvoss (1967)
FK4/FK4 Suppl.	0.47 ± 0.08	− 0.23 ± 0.07	Rius (1974)
FK4/N30	0.39 ± 0.02	− 0.21 ± 0.06	Thüring (1975)
AGK3 (final)	0.44 ± 0.02	− 0.36 ± 0.02	Asteriadis (1977)
CK	0.49 ± 0.06	− 0.31 ± 0.04	Polozhentsev (1979)

TABLA 5

CORRECCIONES A LA CONSTANTE DE LA PRECESION OBTENIDAS POR EL ANALISIS DE LOS MOVIMIENTOS PROPIOS DE LAS ESTRELLAS CON RESPECTO A LAS GALAXIAS

Sistema	Δn ("/siglo)	Δk ("/siglo)	Referencia
Pulkovo – AGK3 (prel.)	0.41 ± 0.12	+ 0.43 ± 0.12	Fatchikhin (1970)
Lick I y II – AGK3 (prel.)	0.31 ± 0.07	− 0.78 ± 0.09	Vasilevskis y Klemola (1971)
Lick II – AGK3 (prel.) corr.	0.48 ± 0.23	− 0.08 ± 0.22	Vasilevskis y Mc Namara (1973)
Lick – AGK3 (final)	0.38 ± 0.06	− 0.34 ± 0.11	Du Mont (1978)
Tashkent – AGK3 (final)	0.18 ± 0.18	− 0.24 ± 0.18	Rakhimov (1978)
Galaxias – Moscú	0.37 ± 0.14	− 0.08 ± 0.16	Transactions of IAU (1979)

En las Tablas 4 y 5 se encuentran algunos de los valores obtenidos para estas correcciones. La Tabla 4 contiene las correcciones obtenidas por el análisis de los movimientos propios de los catálogos fundamentales y la Tabla 5 las obtenidas por el análisis de los movimientos propios de las estrellas respecto a las galaxias. No vamos a adoptar valores de esas tablas puesto que, en el primer caso, se ha utilizado en general el modelo plano y, en el segundo, si bien no dependen de un modelo particular, por las discrepancias internas que presenta la tabla.

El método que vamos a utilizar para resolver los sistemas es buscar nuevas ecuaciones a fin de cerrarlos. El método natural de hacerlo es acudir a las ecuaciones hidrodinámicas de la dinámica estelar. La resolución de estas ecuaciones es el objeto del apartado siguiente.

V. MODELO GALACTICO DE SIMETRIA CILINDRICA

a) *Hipótesis*

Hasta el momento, la única hipótesis planteada es la aproximación lineal. Para las ecuaciones hidrodinámicas hemos adoptado un modelo galáctico cuyas características son:

– El sistema galáctico es estacionario.

– El sistema galáctico posee simetría cilíndrica.

– El sistema galáctico es isotérmico en las proximidades del Sol.

La primera hipótesis se justifica por la pequeña variación de la forma de la Galaxia para intervalos de tiempo cortos. La segunda, se justifica al interpretarse los brazos espirales como acumulación de estrellas brillantes, lo cual no excluye la distribución de simetría cilíndrica. Y la tercera, por el tamaño de nuestra muestra, que nos permite suponer constantes en toda ella los valores de los momentos. Como consecuencia de estas hipótesis, todas las derivadas parciales respecto al tiempo y respecto a θ son nulas, así como todas las derivadas de los momentos.

b) *Ecuaciones hidrodinámicas*

Adoptamos un modelo contínuo para describir el estado dinámico del sistema estelar mediante la función de distribución f(t, *r*, *V*). Supondremos además que no se producen "colisiones" y que la función de distribución, así como sus derivadas, se anulan en el infinito. Sobre cada estrella sólo actúa la fuerza que deriva del potencial gravitatorio U(t, *r*) creado por el resto del sistema. En éstas hipótesis es válida, por tanto, la ecuación de Liouville.

El método de obtención de las ecuaciones hidrodinámicas de orden sucesivo a partir de la ecuación de Liouville puede verse, por ejemplo en Ogorodnikov (1965). En esta obra pueden encontrarse las expresiones de las ecuaciones hidrodinámicas hasta el orden n = 1, pero no las correspondientes a los ordenes n = 2 y n = 3, las cuales no se encuentran en la literatura habitual. Para unificar la notación y tenerlas escritas en nuestras hipótesis, hemos preferido repetir aquí las expresiones de las ecuaciones para n = 0 y n = 1.

Recordemos que en las ecuaciones hidrodinámicas de orden n aparecen los momentos hasta el orden n + 1, por lo cual nos limitaremos a las ecuaciones hasta n = 3, puesto que en el apartado III se han calculado los momentos centrados hasta el cuarto orden. Las ecuaciones hidrodinámicas para nuestro modelo estacionario, cilíndrico e "isotérmico" son las siguientes:

n = 0

$$\Pi\frac{\partial \mathrm{LnN}}{\partial\varpi} + Z\frac{\partial \mathrm{LnN}}{\partial z} + \frac{\partial\Pi}{\partial\varpi} + \frac{\Pi}{\varpi} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad . \tag{17}$$

n = 1

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi\frac{\partial\Pi}{\partial\varpi} + Z\frac{\partial\Pi}{\partial z} - \frac{\Theta^2}{\varpi} + \frac{\partial \mathrm{LnN}}{\partial\varpi}\mu_{200} + \frac{\partial \mathrm{LnN}}{\partial z}\mu_{101} + \frac{1}{\varpi}(\mu_{200} - \mu_{020}) = -\frac{\partial U}{\partial\varpi}\\
&\Pi\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} + Z\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \frac{\Pi\Theta}{\varpi} + \frac{\partial \mathrm{LnN}}{\partial\varpi}\mu_{110} + \frac{\partial \mathrm{LnN}}{\partial z}\mu_{011} + \frac{2}{\varpi}\mu_{110} = 0\\
&\Pi\frac{\partial Z}{\partial\varpi} + Z\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{LnN}}{\partial\varpi}\mu_{101} + \frac{\partial \mathrm{LnN}}{\partial z}\mu_{002} + \frac{1}{\varpi}\mu_{101} = -\frac{\partial U}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad . \tag{18}$$

n=2

$$\left.\begin{aligned}
&-4\mu_{110}\frac{\Theta}{\varpi} + 2\mu_{200}\frac{\partial\Pi}{\partial\varpi} + 2\mu_{101}\frac{\partial\Pi}{\partial z} = -\mu_{300}\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} - \mu_{201}\frac{\partial LnN}{\partial z} + \frac{1}{\varpi}(2\mu_{120}-\mu_{300})\\[2ex]
&\mu_{110}\frac{\Pi}{\varpi} + (\mu_{200}-2\mu_{020})\frac{\Theta}{\varpi} + \mu_{110}\frac{\partial\Pi}{\partial\varpi} + \mu_{011}\frac{\partial\Pi}{\partial z} + \mu_{200}\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} +\\
&\quad + \mu_{101}\frac{\partial\Theta}{\partial z} = -\mu_{210}\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} - \mu_{111}\frac{\partial LnN}{\partial z} + \frac{1}{\varpi}(\mu_{030}-2\mu_{210})\\[2ex]
&-2\mu_{011}\frac{\Theta}{\varpi} + \mu_{101}\frac{\partial\Pi}{\partial\varpi} + \mu_{002}\frac{\partial\Pi}{\partial z} + \mu_{200}\frac{\partial Z}{\partial\varpi} + \mu_{101}\frac{\partial Z}{\partial z} = -\mu_{201}\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} - \mu_{102}\frac{\partial LnN}{\partial z} + \frac{1}{\varpi}(\mu_{021}-\mu_{201})\\
&2\mu_{020}\frac{\Pi}{\varpi} + 2\mu_{110}\frac{\Theta}{\varpi} + 2\mu_{110}\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} + 2\mu_{011}\frac{\partial\Theta}{\partial z} = -\mu_{120}\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} - \mu_{021}\frac{\partial LnN}{\partial z} - \frac{3}{\varpi}\mu_{120}\\[2ex]
&\mu_{011}\frac{\Pi}{\varpi} + \mu_{101}\frac{\Theta}{\varpi} + \mu_{101}\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} + \mu_{002}\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \mu_{110}\frac{\partial Z}{\partial\varpi} + \mu_{011}\frac{\partial Z}{\partial z} = -\mu_{111}\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} -\\
&\quad - \mu_{012}\frac{\partial LnN}{\partial z} - \frac{2}{\varpi}\mu_{111}\\[2ex]
&2\mu_{101}\frac{\partial Z}{\partial\varpi} + 2\mu_{002}\frac{\partial Z}{\partial z} = -\mu_{102}\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} - \mu_{003}\frac{\partial LnN}{\partial z} - \frac{1}{\varpi}\mu_{102}\ .
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

n=3

$$\left.\begin{aligned}
&-6\mu_{210}\frac{\Theta}{\varpi} + 3\mu_{300}\frac{\partial\Pi}{\partial\varpi} + 3\mu_{201}\frac{\partial\Pi}{\partial z} = -(\mu_{400}-3\mu_{200}^2)\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} - (\mu_{301}-3\mu_{200}\mu_{101})\frac{\partial LnN}{\partial z} +\\
&\quad + \frac{1}{\varpi}(3\mu_{200}(\mu_{200}-\mu_{020}) - \mu_{400} + 3\mu_{220})\\[2ex]
&3\mu_{030}\frac{\Pi}{\varpi} + 3\mu_{120}\frac{\Theta}{\varpi} + 3\mu_{120}\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} + 3\mu_{021}\frac{\partial\Theta}{\partial z} = -(\mu_{130}-3\mu_{020}\mu_{110})\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} -\\
&\quad - (\mu_{031}-3\mu_{020}\mu_{011})\frac{\partial LnN}{\partial z} + \frac{1}{\varpi}(6\mu_{020}\mu_{110} - 4\mu_{130})\\[2ex]
&3\mu_{102}\frac{\partial Z}{\partial\varpi} + 3\mu_{003}\frac{\partial Z}{\partial z} = -(\mu_{103}-3\mu_{002}\mu_{101})\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} - (\mu_{004}-3\mu_{002}^2)\frac{\partial LnN}{\partial z} +\\
&\quad + \frac{1}{\varpi}(3\mu_{002}\mu_{101} - \mu_{103})
\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mu_{210}\frac{\Pi}{\varpi} + (\mu_{300} - 4\mu_{120})\frac{\Theta}{\varpi} + 2\mu_{210}\frac{\partial\Pi}{\partial\varpi} + 2\mu_{111}\frac{\partial\Pi}{\partial z} + \mu_{300}\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} + \mu_{201}\frac{\partial\Theta}{\partial z} = \\
&\quad = -(\mu_{310} - 3\mu_{200}\mu_{110})\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} - (\mu_{211} - \mu_{200}\mu_{011} - 2\mu_{110}\mu_{101})\frac{\partial LnN}{\partial z} + \frac{1}{\varpi}(2\mu_{200}\mu_{110} + \\
&\quad + 2\mu_{110}(\mu_{200} - \mu_{020}) - 2\mu_{310} + 2\mu_{130}) \\[2ex]
&2\mu_{021}\frac{\Pi}{\varpi} + 2\mu_{111}\frac{\Theta}{\varpi} + 2\mu_{111}\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} + 2\mu_{012}\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \mu_{120}\frac{\partial Z}{\partial\varpi} + \mu_{021}\frac{\partial Z}{\partial z} = -(\mu_{121} - 2\mu_{011}\mu_{110} - \\
&\quad - \mu_{020}\mu_{101})\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} - (\mu_{022} - 2\mu_{011}^2 - \mu_{020}\mu_{002})\frac{\partial LnN}{\partial z} + \frac{1}{\varpi}(4\mu_{011}\mu_{110} + \mu_{020}\mu_{101} - 3\mu_{121}) \\[2ex]
&-4\mu_{111}\frac{\Theta}{\varpi} + 2\mu_{201}\frac{\partial\Pi}{\partial\varpi} + 2\mu_{102}\frac{\partial\Pi}{\partial z} + \mu_{300}\frac{\partial Z}{\partial\varpi} + \mu_{201}\frac{\partial Z}{\partial z} = -(\mu_{301} - 3\mu_{101}\mu_{200})\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} - \\
&\quad - (\mu_{202} - 2\mu_{101}^2 - \mu_{200}\mu_{002})\frac{\partial LnN}{\partial z} + \frac{1}{\varpi}(2\mu_{101}(\mu_{200} - \mu_{020}) + \mu_{200}\mu_{101} - \mu_{301} + 2\mu_{121}) \\[2ex]
&2\mu_{120}\frac{\Pi}{\varpi} + 2(\mu_{210} - \mu_{030})\frac{\Theta}{\varpi} + \mu_{120}\frac{\partial\Pi}{\partial\varpi} + \mu_{021}\frac{\partial\Pi}{\partial z} + 2\mu_{210}\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} + 2\mu_{111}\frac{\partial\Theta}{\partial z} = \\
&\quad = -(\mu_{220} - \mu_{020}\mu_{200} - 2\mu_{110}^2)\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} - (\mu_{121} - \mu_{020}\mu_{101} - 2\mu_{110}\mu_{011})\frac{\partial LnN}{\partial z} + \frac{1}{\varpi}(\mu_{020}(\mu_{200} - \\
&\quad - \mu_{020}) + 4\mu_{110}^2 - 3\mu_{220} + \mu_{040}) \\[2ex]
&\mu_{012}\frac{\Pi}{\varpi} + \mu_{102}\frac{\Theta}{\varpi} + \mu_{102}\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} + \mu_{003}\frac{\partial\Theta}{\partial z} + 2\mu_{111}\frac{\partial Z}{\partial\varpi} + 2\mu_{012}\frac{\partial Z}{\partial z} = -(\mu_{112} - \mu_{002}\mu_{110} - \\
&\quad - 2\mu_{011}\mu_{101})\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} - (\mu_{013} - 3\mu_{002}\mu_{011})\frac{\partial LnN}{\partial z} + \frac{1}{\varpi}(\mu_{002}\mu_{110} + \mu_{011}\mu_{101} - \mu_{112}) \\[2ex]
&-2\mu_{012}\frac{\Theta}{\varpi} + \mu_{102}\frac{\partial\Pi}{\partial\varpi} + \mu_{003}\frac{\partial\Pi}{\partial z} + \mu_{201}\frac{\partial Z}{\partial\varpi} + 2\mu_{102}\frac{\partial Z}{\partial z} = -(\mu_{202} - \mu_{002}\mu_{200} - 2\mu_{101}^2)\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} - \\
&\quad - (\mu_{103} - 3\mu_{002}\mu_{101})\frac{\partial LnN}{\partial z} + \frac{1}{\varpi}(\mu_{002}(\mu_{200} - \mu_{020}) + 2\mu_{101}^2 - \mu_{202} + \mu_{022}) \\[2ex]
&\mu_{111}\frac{\Pi}{\varpi} + (\mu_{201} - 2\mu_{021})\frac{\Theta}{\varpi} + \mu_{111}\frac{\partial\Pi}{\partial\varpi} + \mu_{012}\frac{\partial\Pi}{\partial z} + \mu_{201}\frac{\partial\Theta}{\partial\varpi} + \mu_{102}\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \mu_{210}\frac{\partial Z}{\partial\varpi} + \\
&\quad + \mu_{111}\frac{\partial Z}{\partial z} = -(\mu_{211} - \mu_{011}\mu_{200} - 2\mu_{101}\mu_{110})\frac{\partial LnN}{\partial\varpi} - (\mu_{112} - 2\mu_{011}\mu_{101} - \\
&\quad - \mu_{110}\mu_{002})\frac{\partial LnN}{\partial z} + \frac{1}{\varpi}(\mu_{011}(\mu_{200} - \mu_{020}) + 3\mu_{101}\mu_{110} + \mu_{031} - 2\mu_{211})
\end{aligned}
\right\}
\tag{20}
$$

Como puede observarse, se dispone de 20 ecuaciones de las cuales tres ($n = 1$) son los lineales, siendo las incógnitas:

$$\Pi,\ \Theta,\ Z,\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varpi},\ \frac{\partial \Pi}{\partial z},\ \frac{\partial \Theta}{\partial \varpi},\ \frac{\partial \Theta}{\partial z},\ \frac{\partial Z}{\partial \varpi}\ \text{y}\ \frac{\partial Z}{\partial z}$$

y como datos los momentos μ_{abc}, así como como ϖ, $\dfrac{\partial \mathrm{LnN}}{\partial \varpi}$ y $\dfrac{\partial \mathrm{LnN}}{\partial z}$.

Al tratar estas ecuaciones por el método de los cuadrados mínimos prescindimos de las tres ecuaciones no lineales.

c) *Planteamiento del sistema*

Para la resolución de nuestro sistema hemos de calcular las incógnitas mencionadas, así como Δn y Δk ya citadas. Planteamos un sistema general de ecuaciones formado por las 16 ecuaciones hidrodinámicas lineales, las ecuaciones (12) y las (13). La ecuación de continuidad no se utiliza ahora, ya que es la única que contiene Z y se resolverá posteriormente. Disponemos, por tanto, de un sistema formado por 25 ecuaciones y 10 incógnitas, resoluble por cuadrados mínimos.

Esta manera de plantear el problema nos permite relacionar los momentos centrados de la distribución de velocidades, obtenidos en el apartado II, con las componentes del gradiente del campo de velocidades, obtenidas en el apartado III y con los parámetros cinemáticos de la Galaxia, a determinar, así como las correcciones de precesión Δn y Δk. Obtenemos, pues, los resultados que mejor se ajustan a los valores de los momentos centrados, a las ecuaciones de condición del apartado III y, por tanto, a los valores S_{ij} y ω_i y a las ecuaciones hidrodinámicas de la dinámica estelar.

Es de destacar que ésta es la primera vez que se propone una solución de este tipo a este nivel de ecuaciones, ya que hasta el presente no se conocían valores de los momentos que nos permitiesen llegar a resolver hasta $n = 3$.

Los datos utilizados para resolver el sistema son: μ_{abc} de la Tabla 1 (muestra 3); S_{ij} y ω_i de la Tabla 2 (muestra 3, solución combinada); $\varpi = 8.5$ kpc, $\partial \mathrm{LnN}/\partial \varpi = 0.1\ \mathrm{kpc}^{-1}$, $\partial \mathrm{LnN}/\partial z = -2.0\ \mathrm{kpc}^{-1}$.

El valor elegido para ϖ es el que se estima más adecuado por diversos autores (Graham 1978; Knapp 1978) y resulta de promediar algunos valores publicados después de 1972. Los valores adoptados para $\partial \mathrm{LnN}/\partial \varpi$ y $\partial \mathrm{LnN}/\partial z$ son de Mihalas y Routly (1967) Stodolkiewicz (1969) y Allen (1976). Otros valores para estos dos últimos parámetros (tanteados como precaución), no mostraron influencia importante sobre los resultados.

d) *Resultados*

Se da a continuación la relación de resultados, en la cual se incluyen los valores obtenidos anteriomente para el movimiento solar, y los que se deducen para las constantes de Oort y A y B para Z. En los valores de los errores de esta relación se ha tenido en cuenta, además, los de la Tabla 2, a fin de lograr una estimación conservadora del error. Si se adoptan otros valores para los momentos y para los gradientes, los errores crecen rápidamente, lo cual prueba la bondad de la muestra elegida.

$u_\odot =$	6.0 ± 0.5	$\mathrm{km\,s^{-1}}$	$B =$	-8.8 ± 3.0	$\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$	$\dfrac{\partial \Pi}{\partial z} =$	4.7 ± 2.3	$\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$
$v_\odot =$	8.3 ± 0.5	$\mathrm{km\,s^{-1}}$	$\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varpi} =$	-1.6 ± 3.3	$\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$	$\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} =$	1.7 ± 2.1	$\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$
$w_\odot =$	5.3 ± 0.5	$\mathrm{km\,s^{-1}}$	$\dfrac{\partial \Theta}{\partial \varpi} =$	-9.1 ± 1.5	$\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$	$\dfrac{\partial Z}{\partial z} =$	7.4 ± 2.7	$\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$
$\Pi =$	51 ± 30	$\mathrm{km\,s^{-1}}$	$\dfrac{\partial Z}{\partial \varpi} =$	6.4 ± 1.7	$\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$	$\Delta n =$	0.36 ± 0.04	"/siglo
$\Theta =$	228 ± 13	$\mathrm{km\,s^{-1}}$				$\Delta k =$	-0.21 ± 0.05	"/siglo .
$Z =$	3 ± 6	$\mathrm{km\,s^{-1}}$						
$A =$	18.0 ± 3.0	$\mathrm{km\,s^{-1}}$						

A la vista de los valores reseñados podemos hacer las siguientes consideraciones:

(1) Los valores obtenidos para el movimiento solar, si bien son algo menores que los habitualmente admitidos, no muestran discrepancias fundamentales con éstos dada la composición de nuestra muestra de estrellas.

(2) El valor de la componente radial del centroide $\Pi \simeq 50 \pm 30$ km s^{-1} concuerda con el de 40 km s^{-1} deducido por análisis de las líneas de absorción y emisión de radiofuentes (Clube 1978) y confirma la existencia de un movimiento no circular a gran escala. Este resultado es importante, pues corrobora la necesidad de tener en cuenta la expansión de la Galaxia al estudiar su dinámica.

(3) El valor que se obtiene para $\Theta = 228 \pm 13$ km s^{-1} es bien concordante con el actualmente en boga de 220 km s^{-1} (Knapp 1978) y confirma que el valor de la U.A.I. de 250 km s^{-1} es demasiado elevado.

(4) El valor que se obtiene para Z indica la ausencia de movimiento del centroide en dirección perpendicular al plano galáctico, lo cual es aceptado por la mayoría de los autores.

(5) Los valores de las constantes de Oort $A = 18.0 \pm 3.0$ km s^{-1} kpc^{-1} y $B = -8.8 \pm 3.0$ km s^{-1} kpc^{-1}, son compatibles con los de la U.A.I., si bien las determinaciones de los diversos autores fluctúan según el método empleado y la muestra de estrellas, oscilando entre 11 y 17 km s^{-1} kpc^{-1} para A y -7 a -15 km s^{-1} kpc^{-1} para B (Knapp 1978). Algunos autores obtienen valores tan dispares como $A = +26$ km s^{-1} kpc^{-1} y $B = -27$ km s^{-1} kpc^{-1} (Asteriadis 1977), para estrellas O-B2 del AGK3, ó $A > 16 \pm 5$ km s^{-1} kpc^{-1}, $B = -25 \pm 5$ km s^{-1} kpc^{-1} (Clube 1973), a partir de los movimientos propios con respecto a las galaxias del programa de Lick. Creemos, por tanto, que los valores obtenidos constituyen una interesante aportación a la determinación de estas constantes.

(6) En cuanto se refiere a las derivadas parciales, la más importante de ellas es la $\partial\Theta/\partial\varpi = -9.1 \pm 1.5$ km s^{-1} kpc^{-1}, según la cual el Sol se encuentra claramente en la zona de decrecimiento de la curva velocidad-distancia. Con respecto a $\partial \Pi/\partial \varpi$ el valor que se obtiene está muy poco determinado, si bien indica un lógico decrecimiento de la expansión al alejarnos del centro de la Galaxia. Con respecto a las demás derivadas, dado que el valor de Z es casi nulo y no se conoce con exactitud la posición del Sol con respecto al plano galáctico (se han obtenido determinaciones tanto positivas como negativas para z), no se puede saber si los signos de estas derivadas son los que cabría esperar, no existiendo por otra parte determinaciones fiables que nos permitan establecer comparaciones. Los valores que se obtienen muestran sin embargo variaciones de los parámetros al alejarnos del plano galáctico, lo cual constituye una prueba más de la necesidad del estudio tridimensional que hemos efectuado.

(7) Para las correcciones a la constante de la precesión se han obtenido $\Delta n = 0.36 \pm 0.04$ "/siglo y $\Delta k = -0.21 \pm 0.05$ "/siglo. Estos valores están en buena concordancia con los adoptados por la U.A.I. $\Delta n = 0.44 \pm 0.04$ "/siglo y $\Delta k = -0.19 \pm 0.06$ "/siglo y pueden compararse con los datos en las Tablas 4 y 5. Puede justificarse el hecho de obtener un Δn algo menor que el deducido por otros autores a partir del Catálogo FK4, ya que nosotros hemos eliminado de nuestra muestra las estrellas O-B con el fin de que se pareciese más a la población predominante de la Galaxia. Creemos que los valores obtenidos constituyen una importante aportación a la determinación de la constante de la precesión.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos desarrollado un modelo galáctico tridimensional en el cual, por primera vez, se ha utilizado una misma fuente de datos para calcular los momentos centrados de la distribución de velocidades y las componentes del gradiente del campo galáctico de velocidades. Hemos planteado un modelo estacionario, de simetría cilíndrica e "isotérmico" que, mediante las ecuaciones hidrodinámicas, nos ha permitido calcular los parámetros cinemáticos de la Galaxia en el entorno solar y las correcciones a la constante de la precesión.

Los resultados obtenidos, mediante una muestra de estrellas representativa de la población de la Galaxia, son los que mejor se ajustan (al estar estimados mediante el método de cuadrados mínimos) a los valores de los momentos centrados de la distribución de las velocidades estelares, a los valores del gradiente del campo de velocidades y a las ecuaciones hidrodinámicas de la dinámica estelar.

Asimismo, hemos desarrollado un sencillo método para el cálculo de los momentos centrados de la distribución de velocidades mediante el cual hemos comprobado los valores ya publicados para las estrellas cercanas y hemos calculado, por primera vez, los momentos hasta el cuarto orden para las estrellas lejanas del Catálogo de Fricke. Así, hemos deducido que las simetrías comunmente supuestas para la Galaxia se mantienen para las estrellas lejanas y que la desviación del vértex es un efecto local que desaparece a gran escala, presentándose en cambio la desviación en dirección perpendicular al plano galáctico.

Para el cálculo del gradiente del campo de velocidades hemos utilizado el modelo tridimensional de Ogorodnikov-Milne, sin más hipótesis que la aproximación lineal, adoptando como solución más correcta la encontrada con la misma muestra utilizada en el cálculo de los momentos centrados. La solución escogida es la obtenida combinando las ecuaciones en movimientos propios y en velocidades radiales, sin adoptar pesos para ellas con el fin de tener una solución lo más general posible.

El cálculo de los parámetros cinemáticos de la Galaxia requiere nuevas ecuaciones, para poder separar de las correcciones de precesión la parte hemisimétrica del gradiente del campo de velocidades. En lugar de las hipótesis habituales, poco justificables, hemos adoptado un modelo estacionario, de simetría cilíndrica e isotérmico para el entorno solar, el cual nos ha permitido plantear las ecuaciones hidrodinámicas de la dinámica estelar. Junto con las establecidas anteriormente y con los valores calculados de los momentos, dichas ecuaciones nos han permitido cerrar el problema de un modo coherente y obtener los valores de los parámetros cinemáticos de la Galaxia en el entorno del Sol y de las correcciones a la constante de la precesión.

Algunos de los parámetros obtenidos no tienen determinaciones precisas de otros autores, si bien nuestros resultados son consistentes con los actuales conocimientos sobre la estructura galáctica. La concordancia de los demás parámetros y de las correcciones a la constante de la precesión con las determinaciones previas de otros autores muestra la consistencia del método y muestras así como la conveniencia del análisis tridimensional de la Galaxia.

Este trabajo fue presentado como tesis doctoral en la Universidad de Barcelona España.

BIBLIOGRAFIA

Allen, C.W. 1976, *Astrophysical Quantities* (London: The Athlone Press).
Asteriadis, G. 1977, *Astr. and Ap.*, **56**, 25.
Charlier, C.W.L. 1926, *The Motion and the Distribution of the Stars*, (University of California Press).
Clube, S.V.M. 1972, *M.N.R.A.S.*, **159**, 289.
Clube, S.V.M. 1973, *M.N.R.A.S.*, **161**, 445.
Clube, S.V.M. 1974, en *IAU Symposium No. 61, New Problems in Astronomy*, eds. W. Gliese, C.A. Murray, y R.H. Tucker (Dordrecht: D. Reidel), p. 217.
Clube, S.V.M. 1978, *Vistas in Astronomy,* **22**, 77.
Delhaye, J. 1965, en *Galactic Structure*, eds. A. Blaauw y M. Schmidt (Chicago: The University of Chicago Press), p. 61.
Dieckvoss, W. 1967, *Astr. Nachr.*, **290**, 141.
Dieckvoss, W. *et al.* 1975, *AGK3 Catalogue*, Hamburg-Bergedorf.
Du Mont, B. 1975, tesis, Universidad de Heidelberg.
Du Mont, B. 1977, *Astr. and Ap.*, **61**, 127.
Du Mont, B. 1978, *Astr. and Ap.*, **66**, 441.
Erickson, R.R. 1975, *Ap. J.*, **195**, 343.
Fatchikhin, N.V. 1970, Soviet Astr.-AJ, **14**, 495.
Fricke, W. 1967*a*, *A.J.*, **72**, 642.
Fricke, W. 1967*b*, *A.J.*, **72**, 1368.
Fricke, W. 1977, *Basic Material for the Determination of Precession and of Galactic Rotation and a Review of Methods and Results, Veröff. Astron. Rechen-Inst. Heidelberg*, No. 28.
Fricke, W. y Kopff, A. 1963, *Fourth Fundamental Catalogue (FK4), Veröff. Astron. Rechen-Inst. Heidelberg*, No. 10.
Gliese, W. 1969, *Catalogue of Nearby Stars, Veröff. Astron. Rechen-Inst. Heidelberg*, No. 22.
Gómez, A. 1974, *Astr. Nachr.*. **295** 133.
Gordon, J.E. 1952, *Izv. Glav. Astron. Obs. Pulkovo,* **19**, No. 148, p. 72.
Graham, J.A. 1978, en *IAU Symposium No. 84, The Large-Scale Characteristics of the Galaxy,* ed. W.B. Burton (Dordrecht: D. Reidel), p. 195.
Kaplan, E.L. 1952, *Biometrika,* **39**, 319.
Knapp, G.R. 1978, en *IAU Symposium No. 84, The Large-Scale Characteristics of the Galaxy* ed. W.B. Burton (Dordrecht: D. Reidel), p. 225.
Lederle, T. 1980, *Mitt. Astron. Gesellschaft* No. 48, p. 59.
Mihalas, D. y Routly, P.M. 1967, *Galactic Astronomy* (San Francisco: Freeman & Co.).
Milne, E.A. 1935, *M.N.R.A.S.*, **95**, 560.
Morgan, H.R. y Oort, J.H. 1951, *Bull. Astr. Inst. Netherlands,* **11**, 379.
Núñez, J. 1977, *Act. II Asam. Nac. Astron. Astrofis.*, (Cádiz), p. 61.
Núñez, J. y Torra, J. 1980*a*, *Act. III Asam. Nac. Astron. Astronfis.*, (Almería), p. 851.
Núñez, J. y Torra, J. 1980*b*, *Act III Asam. Nac. Astron. Astrofis.*, (Almería), p. 839.
Núñez, J. y Torra, J. 1982, *Astr. and Ap.,* **110**, 95.
Ogorodnikov, K.F. 1932, *Z. Astrophys.*, **4**, 190.
Ogorodnikov, K.F. 1965, *Dynamics of Stellar Systems,* (London: Pergamon Press).
Oort, J.H. 1965, en *Stars and Stellar Systems*, eds. G.P. Kuiper y B.M. Middlehurst, (Chicago: The University of Chicago Press), Vol. V.
Orús, J.J. de 1975, *Act. I Asam. Nac. Astron. Astrofis.*, (Tenerife), p. 121.
Polozhentsev, D.D. 1979, *Izv. Glav. Astron. Obs. Pulkovo*, No. 196.
Rakhimov, A.G. 1978, *Tr. Tashkent Astron. Obs.*, **2**, 59.
Rius, A. 1974, tesis doctoral, Universidad de Barcelona.
Smithsonian Astrophysical Observatory, 1966, *Star Catalog (Washington: Smithsonian Institution)* SAO.
Stodolkiewicz, J.S. 1969, *General Astrophysics*, (New York: Elsevier Publ. Co., Inc.).
Thüring, B. 1975, *Astr. Nachr.*, **296**, 83.
Transactions of IAU, 1979, ed. E.A. Muller (Dordrecht: D. Reidel), Vol. **17** A, Part 2, p. 6.
Vasilevskis, S. y Klemola, A.R. 1971, *A.J.*, **76**, 508.
Vasilevskis, S. y McNamara, B.J. 1973, *A.J.*, **78**, 639.

Jorge Núñez: Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos, Universidad de Barcelona, Diagonal 645, Barcelona 28, España.