

## ESTUDIO DE LA VELOCIDAD DE ROTACION EN LOS SISTEMAS ESTELARES A SIMETRIA AXIAL

J. Sanz

Departamento de Matemáticas  
Universidad Politécnica de Cataluña, España

M.A. Catalá

Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos,  
Universidad de Barcelona, España

Received 1986 April 15

### RESUMEN

Se ha calculado la componente tangencial de la velocidad de rotación en un modelo de galaxia a simetría axial, estado no estacionario y plano ecuatorial de simetría, partiendo de los postulados y ecuaciones fundamentales de la teoría de Chandrasekhar, observándose un desplazamiento del máximo para distintos valores de la cota  $Z$  y la dirección  $\theta$ .

### ABSTRACT

This paper contains the calculation of the tangential component of the velocity for a model of galaxy with axial symmetry, non-stationary state and equatorial symmetry plane, from the postulates and fundamental equations of Chandrasekhar theory, that shows a shift of the maximum for different values of the  $Z$  coordinate and the  $\theta$  direction.

**Key words:** STELLAR DYNAMICS – STELLAR SYSTEMS

### 1. INTRODUCCION

La dinámica de los sistemas estelares se fundamenta en los tres postulados siguientes (Chandrasekhar 1942):

1. En todo punto  $\mathbf{r}$  hay definido un sistema de coordenadas que es función continua de la posición  $\mathbf{r}$  y del tiempo  $t$ , respecto al cual las estrellas se encuentran, en media, en reposo.

Si designamos por  $\mathbf{V}$  la velocidad de una estrella respecto al sistema inercial de referencia, y por  $\mathbf{V}_0(\mathbf{r}, t)$  la velocidad, respecto al sistema inercial, del centroide local (origen de coordenadas del sistema local) relativo al punto  $\mathbf{r}$ , la velocidad residual  $\mathbf{v}$  de dicha estrella respecto al sistema local relativo al mencionado punto, será:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_0 \quad (1)$$

2. La función de distribución  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$  es del tipo de Schwarzschild generalizado, es decir:

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) \equiv \psi(Q + \sigma), \quad (2)$$

con

$$Q = \mathbf{v}^t \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad (3)$$

y el tensor simétrico de segundo orden  $\mathbf{A}$  y el escalar  $\sigma$  son funciones continuas de  $\mathbf{r}$  y del tiempo  $t$ .

3. Los movimientos de las estrellas vienen regidos por un potencial  $U(\mathbf{r}, t)$  por unidad de masa, y la función de distribución satisface la ecuación fundamental de la dinámica estelar:

$$\frac{d\psi}{dt} \equiv \frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \psi - \nabla_{\mathbf{r}} U \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \psi = 0, \quad (4)$$

(ecuación de Boltzmann sin colisiones), que establece la conservación de la función de distribución a lo largo de las trayectorias de las estrellas en el espacio de las fases.

Sustituyendo (2) en la ecuación (4) e introduciendo el vector  $\underline{\Delta}$  y el escalar  $\chi$  definidos por

$$\underline{\Delta} \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_0, \quad (5)$$

$$-\chi \equiv \underline{\Delta} \cdot \mathbf{V}_0 + \sigma, \quad (6)$$

se llega al conjunto de ecuaciones diferenciales, fundamental en el estudio de la dinámica de los sistemas estelares (Orús 1952):

$$\text{def } A = 0 \quad , \quad (7)$$

$$\text{def } \underline{\Delta} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} \quad , \quad (8)$$

$$A \cdot \nabla U + \frac{\partial \underline{\Delta}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla \chi \quad , \quad (9)$$

$$\underline{\Delta} \cdot \nabla U = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad ; \quad (10)$$

$$\Pi_0 = \frac{\beta \bar{\omega}}{|A|} (k_3 + k_4 \bar{\omega}^2) (q_2 \cos 2\theta - q_1 \sin 2\theta) \quad ,$$

$$\Theta_0 = \frac{-\beta \bar{\omega}}{|A|} \left[ (k_3 + k_4 \bar{\omega}^2) (K_1 + q_1 \cos 2\theta + q_2 \sin 2\theta) + k_3 k_4 Z^2 \right] \quad , \quad (11)$$

$$\zeta_0 = \frac{\beta k_4 \bar{\omega}^2 Z}{|A|} (q_2 \cos 2\theta - q_1 \sin 2\theta) \quad ;$$

siendo:

$$\begin{aligned} |A| &= (K_1 + k_2 \bar{\omega}^2 + k_4 Z^2) (K_1 k_3 + K_1 k_4 \bar{\omega}^2 + \\ &+ k_3 k_4 Z^2) - (k_3 + k_4 \bar{\omega}^2) (q_1^2 + q_2^2) + \quad (12) \\ &+ \{ (k_3 + k_4 \bar{\omega}^2) k_2 \bar{\omega}^2 + k_4^2 \bar{\omega}^2 Z^2 \} \times \\ &\times (q_1 \cos 2\theta + q_2 \sin 2\theta) \quad , \end{aligned}$$

donde  $\beta$  es una función arbitraria del tiempo y los demás coeficientes constantes.

### III. ESTUDIO DE LA COMPONENTE TANGENCIAL DE LA VELOCIDAD

#### a) Componente tangencial de la velocidad en el plano $Z = 0$

Haciendo  $Z = 0$  en la segunda expresión de (11) y en (12), y definiendo:

$$\Phi = K_1 + Q \sin(2\theta + \phi) \quad ,$$

$$Q^2 = q_1^2 + q_2^2 \quad , \quad \tan \phi = \frac{q_1}{q_2} \quad , \quad (13)$$

$$\tau = \frac{k_2}{K_1^2 - Q^2} \quad , \quad \eta = \frac{-\beta}{K_1^2 - Q^2} \quad ;$$

la componente  $\Theta_0$  de la velocidad en dicho plano puede escribirse:

$$\Theta_0 = \frac{\eta \Phi \bar{\omega}}{1 + \tau \Phi \bar{\omega}^2} \quad . \quad (14)$$

Normalizando ahora, de forma que el máximo esté situado en el punto (1, 1, 1) y su simétrico (Figura 1), se obtiene:

que son, en forma reducida, las ecuaciones fundamentales de la dinámica estelar obtenidas por Chandrasekhar y en las que fundamentamos nuestro trabajo. En él se estudia un modelo a simetría axial (es decir, el mismo comportamiento para puntos simétricos, dos a dos, respecto al eje Z de simetría) y estado no estacionario, en el que el elipsoide de velocidades residuales de las estrellas asociado a Q presente igual comportamiento en puntos simétricos respecto al plano de simetría del sistema estelar.

El estudio de dicho modelo ha puesto de manifiesto, entre otros resultados, el desplazamiento y atenuación del máximo de la curva velocidad-distancia  $\Theta_0(\bar{\omega}, \theta, Z)$ , al considerar distintas direcciones o alturas sobre el plano ecuatorial del sistema, y la singular localización en el espacio de dichos máximos, situados sobre las directrices de un cilindro elíptico cuya intersección con el plano  $\Theta_0 = 0$  es una elipse.

### II. CALCULO DE LAS COMPONENTES DE LA VELOCIDAD

Para llegar a obtener las componentes de la velocidad de los centroides locales ( $\Pi_0, \Theta_0, \zeta_0$ ) resolveremos las ecuaciones (7) y (8) imponiendo las siguientes condiciones:

1) Simetría axial de eje Z. Supone anular los coeficientes de los términos que contienen potencias impares de  $\sin\theta$  y  $\cos\theta$ .

2) Igual comportamiento del elipsoide de velocidades residuales para puntos simétricos respecto al plano de simetría del sistema estelar  $Z = 0$ . Supone anular los coeficientes de las potencias impares en Z en los invariantes lineal, cuadrático y cúbico del tensor A.

3) Paridad para la velocidad de los centroides locales. Supone anular los coeficientes de las potencias impares en Z de  $\Pi_0$  y  $\Theta_0$ , y las pares de  $\zeta_0$ .

4) Finitud de las componentes de la velocidad para  $\bar{\omega} \rightarrow \infty$  y  $Z \rightarrow \infty$ . Supone anular los coeficientes que presentan grado del numerador superior al del denominador.

Con todo ello llegamos a un sistema de relaciones entre dichos coeficientes que admite como solución unas condiciones suficientes que nos conducen a:

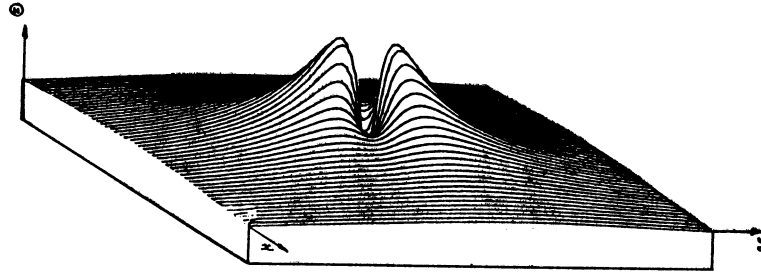


Fig. 1. Superficie velocidad tangencial en el plano galáctico.

$$\Theta = \frac{2XY}{1 + XY^2} \quad (15)$$

donde:

$$X = \frac{\Phi}{\Phi_1}; \quad Y = \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}_1}; \quad \Theta = \frac{\Theta_0}{\Theta_{01}}; \quad (16)$$

$$\bar{\omega}_1 = \left( \frac{K_1 - Q}{k_2} \right)^{1/2}; \quad \Phi_1 = K_1 + Q$$

siendo  $\Phi_1, \bar{\omega}_1, \Theta_{01}$  los valores que toman  $\Phi, \bar{\omega}, \Theta_0$  en el máximo.

La expresión (15) representa la superficie velocidad tangencial en el plano  $Z=0$  (Figura 1). La curva velocidad-distancia para una dirección  $\theta$  determinada se obtiene al considerar en (15) dicho ángulo fijo y hacer una representación en función de la distancia al centro. Del estudio analítico de estas curvas según las distintas direcciones  $\theta$  resulta que cada una de ellas presenta un máximo relativo situado a la distancia:

$$Y_m = \left[ \frac{K_1 + Q \sin(2\theta + \phi)}{K_1 + Q} \right]^{-1/2} \quad (17)$$

y de magnitud

$$\Theta_m = \frac{1}{Y_m} = \left[ \frac{K_1 + Q \sin(2\theta + \phi)}{K_1 + Q} \right]^{1/2} \quad (18)$$

Es decir, la posición y magnitud de estos máximos varía según el ángulo que se considere, resultando un desplazamiento y atenuación de los mismos al barrer las distintas direcciones en el plano galáctico, (Figura 2). Además, la relación distancia al centro-magnitud del máximo expresada en (18) indica que en una representación  $(Y, \Theta)$

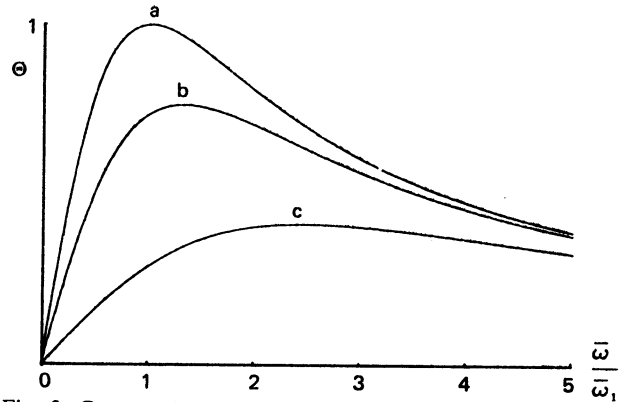


Fig. 2. Curvas velocidad-distancia correspondientes a distintas direcciones  $\theta$  sobre el plano  $Z=0$ . a)  $\pi/4, 5\pi/4$ . b)  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ . c)  $3\pi/4, 7\pi/4$ .

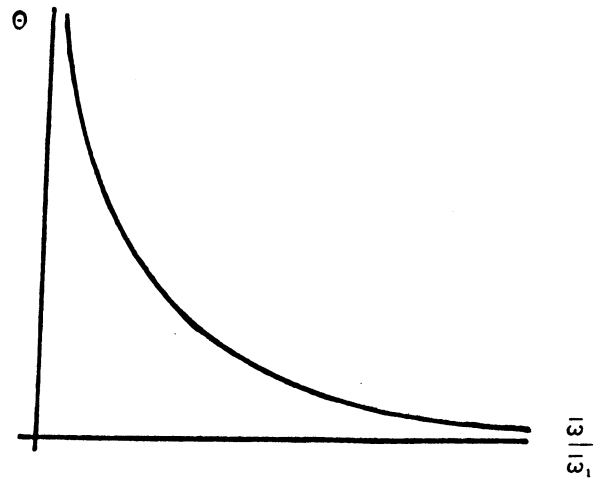


Fig. 3. Lugar geométrico de los máximos de la curva velocidad-distancia según las distintas direcciones  $\theta$ .

estos máximos están situados sobre una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas, (Figura 3).

El ángulo al que corresponde el mayor de los máximos es:

$$\theta_{mx} = 1/2 \{ (4n + 1) \pi/2 - \phi \} \quad (19)$$

en cuyo caso:

$$Y_{mx} = 1 ; \quad \Theta_{mx} = 1 ; \quad (20)$$

tal como se ha impuesto en la normalización que se indica en (15). El ángulo al que corresponde el menor de ellos viene dado por

$$\theta_{mn} = 1/2 \{ (4n + 3) \pi/2 - \phi \} , \quad (21)$$

en cuyo caso:

$$Y_{mn} = \left[ \frac{K_1 + Q}{K_1 - Q} \right]^{1/2}, \quad \Theta_{mn} = \frac{1}{Y_{mn}} \quad (22)$$

En lo sucesivo, llamaremos *curva maximal* a la que contiene el mayor de los máximos, y *curva minimal* a la que contiene el menor de ellos, simbolizándose con los subíndices "mx" y "mn" respectivamente.

De las expresiones (22) se desprende que cuando  $K_1 = Q$ , la curva minimal es el eje de abscisas, encontrándose el máximo en el infinito.

Por otro lado, la franja comprendida entre las curvas maximal y minimal, en el caso particular en que hemos situado nuestro modelo, sólo depende de  $K_1$  y  $Q$ . En particular, cuando  $Q = 0$ , ésta es nula, es decir, ambas curvas coinciden, siendo la curva velocidad-distancia independiente del ángulo, lo que era de esperar, ya que  $Q = 0$  supone simetría cilíndrica.

Considerando la variación de la componente tangencial de la velocidad en función del ángulo, tomando la distancia al centro como parámetro, se obtienen a partir de la fórmula (15) dos máximos y dos mínimos cuyas abscisas vienen dadas por:

$$\theta_M = 1/2 \{ (4n + 1) \pi/2 - \phi \}, \theta'_M = \theta_M + \pi ; \quad (23)$$

$$\theta_m = 1/2 \{ (4n + 3) \pi/2 - \phi \}, \theta'_m = \theta_m + \pi ;$$

que resultan ser los ángulos correspondientes a las curvas maximal y minimal respectivamente, siendo sus ordenadas (Figura 4):

$$\Theta_M = \frac{2Y}{1 + Y^2}, \quad \Theta_m = \frac{2Y}{\frac{K_1 + Q}{K_1 - Q} + Y^2} \quad (24)$$

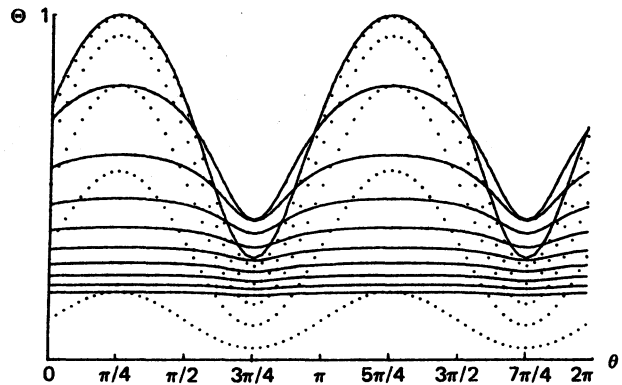


Fig. 4. Componente tangencial de la velocidad en función del ángulo para distintas distancias al centro. Las líneas de puntos corresponden a la distancias 0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9, y las líneas continuas a 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

Nótese en (24) que para  $Q = 0$ , simetría cilíndrica, se tiene  $\Theta_M = \Theta_m$ ; es decir, rectas paralelas al eje de abscisas, tal como ocurre en el modelo a simetría cilíndrica de Chandrasekhar (1942).

Por otro lado, siendo  $Q \neq 0$ , a medida que aumenta la distancia al centro de la galaxia, las curvas se suavizan hasta convertirse en rectas paralelas al eje de abscisas. (Ver Figura 4).

Definiendo como *curva de velocidad tangencial máxima* el lugar geométrico de los puntos del plano  $\Theta_0 = 0$  a los que corresponden máximos de las curvas velocidad-distancia, se obtiene una elipse centrada en la galaxia, cuyo eje mayor forma un ángulo  $\alpha$  con una dirección origen

$$\alpha = \pi/4 - \phi/2, \quad (25)$$

siendo su excentricidad

$$e = \left( \frac{2Q}{K_1 + Q} \right)^{1/2}, \quad (26)$$

y su semieje menor de longitud igual a la distancia  $\bar{\omega}_1$  dada por (16), (ver Figura 5).

b) *Componente tangencial de la velocidad fuera del plano  $Z = 0$*

El comportamiento de la componente tangencial de la velocidad en función de una de sus variables, tomando las otras dos como parámetros, se obtiene fácilmente del análisis de las gráficas de la función  $\Theta_0(\bar{\omega}, \theta, Z)$  dada por (11), función poco manejable analíticamente pero de sencilla representación gráfica.

En la Figura 6 se representa esta componente de la velocidad en función de la distancia al centro, para distintas

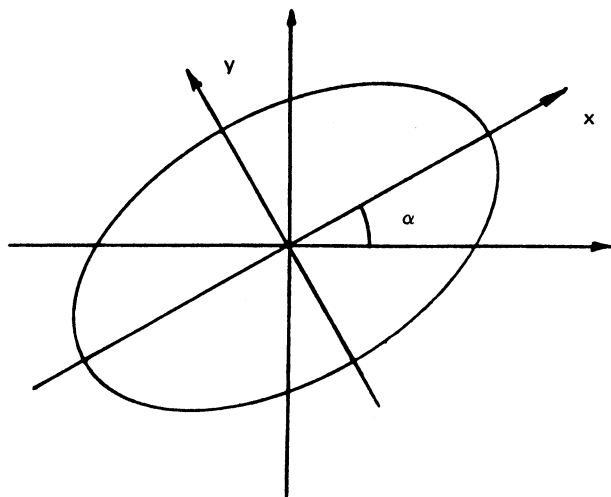


Fig. 5. Curva de velocidad tangencial máxima.

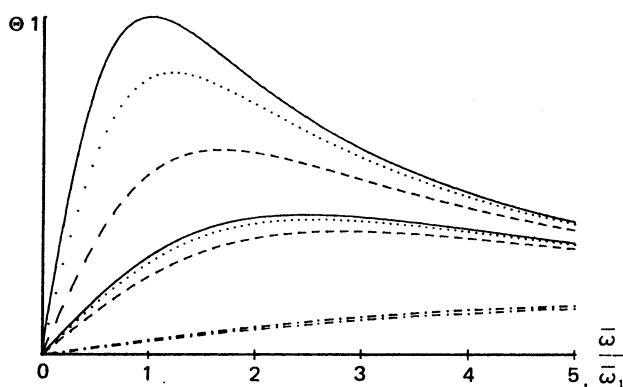


Fig. 6. Curvas velocidad-distancia para distintos valores de  $\theta$  y  $Z$ .  $Z = 0$  —,  $Z = 0.5$  ·····,  $Z = 1$  - - - - -,  $Z = 5$  - · - · - ·. En cada caso, las curvas superior e inferior son la maximal y la minimal, y corresponden, respectivamente a  $\theta_M = \pi/4$  y  $\theta_m = 3\pi/4$ .

alturas sobre el plano galáctico y considerando diferentes ángulos para cada una de ellas.

Nótese que el desplazamiento de los máximos también se presenta al variar  $Z$ . Además, la dispersión de las curvas disminuye al aumentar la altura o la distancia al centro. Este hecho resulta todavía más evidente al considerar la representación de  $\Theta_0$  en función de  $Z$ , tomando la distancia al eje de simetría del sistema  $\bar{\omega}$  y el ángulo  $\theta$  como parámetros, (Figura 7).

En la Figura 7 se muestra la dependencia de la componente tangencial de la velocidad en  $Z$  y  $\theta$ . Esta es particularmente importante para distancias próximas al máximo de la curva velocidad-distancia ( $\bar{\omega}/\bar{\omega}_1 = 1$ ) y al plano de simetría del sistema estelar ( $Z = 0$ ). Ello da una idea del alcance de las desviaciones de la curva velocidad-distancia respecto de un modelo a simetría cilíndrica.

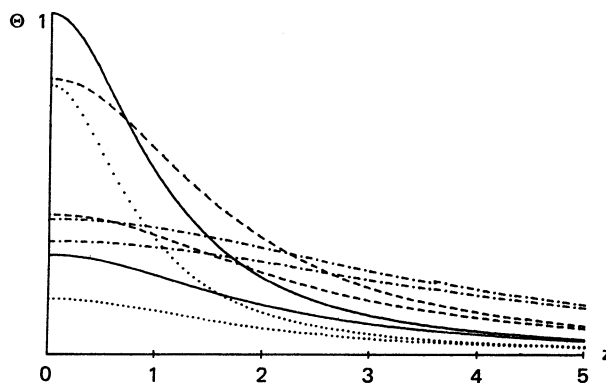


Fig. 7. Componente tangencial de la velocidad en función de la altura al plano galáctico para distintos valores de la distancia al centro y del ángulo  $\theta$ .  $\bar{\omega}/\bar{\omega}_1 = 0.5$  ·····,  $\bar{\omega}/\bar{\omega}_1 = 1$  —,  $\bar{\omega}/\bar{\omega}_1 = 2$  - - - - -,  $\bar{\omega}/\bar{\omega}_1 = 5$  - · - · - ·. En cada caso, las curvas superior e inferior son la maximal y la minimal respectivamente.

#### IV. DISCUSION Y RESULTADOS

En este trabajo se estudia la curva de rotación en un modelo de galaxia a simetría axial, estado no estacionario y con un plano ecuatorial de simetría, partiendo de los puntos de los postulados y ecuaciones fundamentales de la teoría de Chandrasekhar.

No se ha incluido en el modelo la hipótesis de autoconsistencia. El potencial ya queda determinado (o al menos en su forma funcional) con la imposición de una función de distribución cuadrática en las velocidades residuales, ya que éste aparece como incógnita en el sistema de ecuaciones (7), (8), (9) y (10). Este hecho es el causante de que la velocidad obtenida tenga un comportamiento anormal en el infinito; se comporta como  $r^{-1}$  y no se ajusta, por tanto, a las observaciones para valores elevados de  $r$ , que indican, en general una curva de rotación plana. Sin embargo, el que a partir de ellas se consigan reproducir curvas como es el caso de galaxias con poca masa (Galaxias Irregulares o Elípticas Enanas) y obtener buenos ajustes parciales para galaxias más macizas, indica que su comportamiento es correcto hasta distancias no demasiado alejadas del máximo de la curva de rotación.

Las curvas de rotación obtenidas en nuestro caso muestran, además, un desplazamiento y atenuación de los máximos, según la dirección o altura respecto al plano de la galaxia que se considere. Esta atenuación al variar el ángulo también se presenta en el modelo estudiado por Petrou (1983), aunque la posición de los mismos permanece fija. Lo novedoso del trabajo que aquí presentamos radica en el desplazamiento de los máximos de la curva de rotación, el cual se observa, al menos formalmente, en algunas curvas velocidad-distancia, como las correspondientes a las galaxias NGC 1553 (Kormendy 1984), NGC 3115 (Illingworth y Schechter 1982),<sup>1</sup> para las que

1. En este sentido debe aclararse que estas curvas velocidad-distancia requieren correcciones (debidas a la inclinación de la

se han realizado medidas de la curva de rotación en distintas direcciones.

---

galaxia, . . .) para ser directamente comparables con nuestra curva de rotación. Sin embargo, dichas correcciones no afectan substancialmente la forma estructural de la misma en los aspectos que se tratan en este trabajo.

#### BIBLIOGRAFIA

- Chandrasekhar, S., 1942, *Principles of Stellar Dynamics*, (Chicago: The University of Chicago Press), p. 88.  
Illingworth, G., and Schechter, P.L., 1982, *A.J.*, 256, 481.  
Kormendy, J., 1984, *Ap. J.*, 286, 116.  
Orús, J.J. de, 1952, *Contribución a la teoría de Chandrasekhar sobre la dinámica de los Sistemas Estelares*, Collectanea Mathematica Barcelona, Vol. V, Fasc. 2.  
Petrou, M., 1983, *Ap. J.*, 256, 481.

M.A. Catalá: Departamento de Física de la Tierra y el Cosmos, Universidad de Barcelona, Avda. Diagonal 645, 08028 Barcelona, España.

J. Sanz: Departamento de Matemáticas de la E.T.S.I.T.B., Universidad Politécnica de Cataluña, J. Girona Salgado, s.n., 08034 Barcelona, España.