

ULTIMAS NOTICIAS SOBRE EL SISTEMA DE LENTE
GRAVITACIONAL 0957+561

Emilio E. Falco

Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, EUA

RESUMEN

El sistema de lente gravitacional 0957+561 ha sido estudiado minuciosamente. Las observaciones de VLBI de nuestro grupo nos han permitido determinar modelos detallados de la lente. Nuestros modelos establecen límites útiles para el valor de la constante de Hubble. Comenzamos así a desarrollar las aplicaciones de las lentes gravitacionales como herramientas cosmológicas.

ABSTRACT

The gravitational lens system 0957+561 has been studied in detail. Our group's VLBI observations have allowed us to determine detailed models for the lens. Our models set useful limits on the value of Hubble's constant. We are thus beginning to develop the applications of gravitational lenses as cosmological tools.

Key words: GRAVITATION

I. INTRODUCCION

La lista de candidatos a lentes gravitacionales contiene ya siete sistemas que han sido descubiertos a razón de uno por año desde 1979. Cada uno de los sistemas en la lista consta de un cuasar como fuente luminosa distante, de dos o más imágenes del cuasar, y de una galaxia o un cúmulo de galaxias situado entre el cuasar y el observador. Este es el escenario general que consideramos en nuestro análisis. Consideramos importante estudiar en detalle cada sistema por varias razones. La razón principal es que las lentes gravitacionales pueden ser utilizadas como herramientas cosmológicas, como demostraremos en el caso que hemos estudiado. Otra razón importante es la discrepancia significativa entre las observaciones y las predicciones teóricas de la separación entre imágenes; las separaciones típicas son de varios segundos de arco, mientras que la teoría predice una separación típica de un segundo de arco. El estudio de sistemas de lente gravitacional puede rendir respuestas a incógnitas tales como el valor de la constante de Hubble, y como la presencia o ausencia de materia oscura en el Universo. Presentamos aquí resultados recientes sobre modelos para el primer sistema de lente gravitacional, 0957+561, descubierto por Walsh y sus colaboradores en 1979 (Walsh, Carswell y Weymann 1979).

Nuestro estudio de 0957+561 fue un paso lógico debido a lo novedoso de la fuente, y a que nuestro grupo fue uno de los primeros en observarla utilizando la técnica de VLBI. Aunque las componentes ópticas de 0957+561 fueron postuladas desde el principio como dos imágenes de una misma fuente, las observaciones de varios grupos distintos desde frecuencias ultravioletas hasta las de radio, obtenidas a partir de 1979, confirmaron la gran similitud entre los espectros de las imágenes, y elimi-

naron toda duda sobre la veracidad de la hipótesis de lente gravitacional. La identificación indiscutible de la lente en 0957+561 es una de las pocas disponibles entre los sistemas conocidos. Este conocimiento nos ha permitido desarrollar modelos específicos para la lente, lo que es menos factible en los casos restantes (exceptuando al sistema 2237+0305; Huchra *et al.* 1985).

A continuación, presentamos las hipótesis que utilizamos para desarrollar nuestros modelos, y discutimos las cantidades observables en un sistema de lente gravitacional generalizado. Luego enumeramos los parámetros de los modelos de lente gravitacional posibles en general, y discutimos brevemente ciertas transformaciones de parámetros que permiten eliminar los que sean redundantes. Después, destacamos brevemente las observaciones de 0957+561 más importantes desde el punto de vista de los modelos de la lente. Finalmente, mencionamos nuestro modelo más detallado que explica las propiedades VLBI de las imágenes A y B, y establece un límite superior en la constante de Hubble que depende del modelo elegido.

**II. SISTEMA DE LENTE
GRAVITACIONAL**

La Figura 1 muestra un escenario típico de sistema lente gravitacional. Las imágenes y la lente tienen corrimientos al rojo z_s y z_d , respectivamente. Nuestras hipótesis principales son:

- 1) Despreciamos todo efecto de difracción, y utilizamos la óptica geométrica para trazar rayos de luz.
- 2) Suponemos que los campos gravitatorios son débiles,

lo que resulta en pequeños ángulos de desviación de la luz.

- 3) Consideramos una aproximación "repentina", de modo que la desviación de la luz ocurre enteramente en un plano con corrimiento al rojo z_d , que contiene a la lente; podemos así representar la lente como una distribución superficial (en el plano de la lente) de densidad de masa.
- 4) Suponemos que la lente es estática, es decir que durante el tiempo de pasaje de la luz a través o cerca de la lente, ésta no evoluciona y no se traslada apreciablemente.
- 5) Adoptamos el modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker, parametrizado con la constante de Hubble H_0 y la densidad Ω , y utilizamos como referencia el valor $\Omega = 0$.
- 6) Las distancias entre la lente y la fuente y entre el observador y la lente, y el observador y la fuente (respectivamente, D_{ds} , D_d , y D_s) son las llamadas distancias "de tamaño angular", que preservan la relación Euclidiana entre distancias y ángulos. Dadas estas hipótesis, el ángulo de desviación está dado por la aproximación de primer orden (Weinberg 1972):

$$\alpha(\vec{p}; \theta) = -\frac{4}{D_d} \int_S \sigma(\vec{p}; \theta') \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} dx' dy', \quad (1)$$

donde $\theta' \equiv (x', y')$, S es el área de la lente, en proyección sobre el plano de la lente, y nuestras unidades requieren $G = c = 1$. Las componentes Cartesianas del vector \vec{p} son los parámetros de la lente.

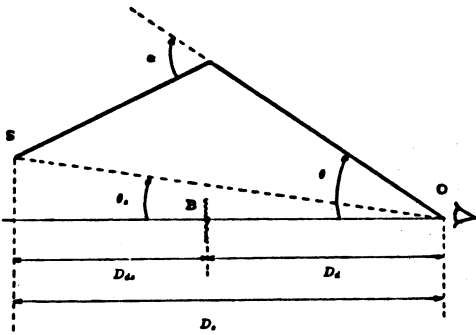


Figura 1. La fuente está en S, el observador en O, y la lente en B. La luz emitida por la fuente llega hasta el observador después de sufrir una desviación α . La fuente y la lente tienen una separación angular θ_s , y la imagen de la fuente y la lente una separación angular θ .

III. CANTIDADES OBSERVABLES

Las cantidades observables de un sistema de lente gravitacional se separan naturalmente en propiedades de las imágenes, y en propiedades de la lente en sí misma. Las propiedades que se pueden deducir de observaciones de la luminosidad de imágenes gravitacionales son:

- 1) Las posiciones angulares relativas (entre sí y posiblemente con respecto a otros puntos de referencia,

tales como el centro de luminosidad de la lente. Cada posición representa dos coordenadas, es decir, corresponde a un vector de dos dimensiones que describimos con el símbolo θ_i para una imagen i ; las coordenadas (no observables) de la fuente se representan con θ_s (ver Figura 1).

- 2) Las magnificaciones relativas, dadas por una matriz de 2×2 generalmente no simétrica (Falco, Gorenstein y Shapiro 1985). Debido a la conservación de intensidad por lentes adiabáticas tales como las gravitacionales, la magnificación absoluta de una imagen con respecto a su fuente correspondiente es igual a la razón de áreas entre la imagen y la fuente. En general, un desplazamiento $\delta\theta_i$; infinitesimal con respecto a θ_i depende linealmente del desplazamiento correspondiente $\delta\theta_s$ con respecto a la posición de la fuente: $\delta\theta_i = [M_i] \delta\theta_s$. La matriz $[M_i]$ de 2×2 es simétrica, y es función de las derivadas parciales de $\alpha(\theta_i)$ con respecto a las componentes Cartesianas de θ_i . De forma análoga, la magnificación relativa de dos imágenes es el producto $[M_{ij}] = [M_i][M_j]^{-1}$. La razón entre los flujos de dos imágenes es el valor absoluto del determinante de $[M_{ij}]$; si el signo de este último es negativo, las imágenes tienen paridades opuestas.

- 3) Los retrasos para pares de imágenes. Una lente gravitacional modifica el tiempo de propagación de la radiación que viaja desde una fuente hasta el observador. Dos factores contribuyen a esta modificación: (1) las trayectorias de rayos luminosos desviados son más largas que un rayo no desviado, y (2) el potencial gravitacional de la lente "retrasa" a la radiación. La diferencia entre tiempos de propagación de rayos desviados y no desviados consta entonces de dos términos; el primero se denomina "geométrico", y el segundo "potencial". Definimos el retraso correspondiente a una imagen i como $\Delta\tau_i = \Delta\tau_i^g + \Delta\tau_i^p$. Supongamos que la luminosidad de la fuente varía de manera de producir una fluctuación apreciable dentro de un tiempo suficientemente corto. El retraso $\Delta\tau_i$ no es medible, pero el retraso relativo $\Delta\tau_{ij}$ para dos imágenes i y j sí lo es; lo expresamos como $\Delta\tau_{ij} \equiv \Delta\tau_i - \Delta\tau_j$. Para cada par de imágenes i y j , $\Delta\tau_{ij}$ es una función de los ángulos de desviación α_i y α_j , y de una integral del ángulo de desviación sobre el plano de la lente (Falco 1985).

- 4) El corrimiento al rojo de cada imagen. La independencia de la desviación gravitacional con respecto a la frecuencia de la radiación desviada hace que todas las imágenes de una misma fuente tengan el mismo corrimiento al rojo. Se ve fácilmente que las posiciones relativas y las magnificaciones relativas de imágenes son funciones solamente de ángulos, y por lo tanto no dependen de H_0 , mientras que $\Delta\tau_{ij}$ es proporcional a la distancia D_s , y, por lo tanto, a H_0^{-1} . Es por esto que es posible determinar un valor de H_0 por medio de observaciones de lentes gravitacionales.

Las propiedades que se pueden deducir de observaciones de la luminosidad de una lente gravitacional son más variadas que las de imágenes gravitacionales. Las dividimos en dos clases distintas: las propiedades geométricas, y las propiedades físicas de la lente. Por ejemplo, para ilustrar las propiedades geométricas, se puede determinar el centro y la distribución de luminosidad de cada componente distinto de la lente. Además, como en el caso de las imágenes, es posible determinar el corrimiento al rojo de la lente. En casos más complejos que los que consideramos aquí, donde distintos miembros de la lente se encuentran a distancias distintas, puede

haber varios corrimientos al rojo asociados con la lente. Es posible además determinar cantidades tales como el tamaño, la forma y la orientación de la emisión de la lente. Entre las propiedades físicas, que se pueden determinar por análisis espectroscópico, contamos a la dispersión de velocidad y a la razón entre masa y luminosidad, para cada componente de la lente.

IV. PARAMETROS DE MODELOS DE LENTES GRAVITACIONALES

En nuestra aproximación para el análisis de lentes gravitacionales, un modelo es simplemente una distribución de densidad superficial de masa, en el plano de la lente. Un modelo de lente gravitacional contiene la posición angular θ_s de los centros de masa de las componentes de la lente. Un modelo requiere además las cantidades que definen la forma y orientación de las componentes de la lente, tales como ejes semi-menores y semi-mayores, ángulos de posición, y el grado de concentración de masa en el centro de la lente.

En general, en cada sistema pueden existir parámetros no determinables por razones tales como la debilidad de la emisión de la lente, que se pueden remediar a veces con detectores más sensibles o precisos. Existen además relaciones que complican la selección de parámetros, como sucede con la razón entre masa y luminosidad, que se relaciona con propiedades geométricas de la lente. Esta es una ventaja de modelos de lente gravitacional, ya que se concibe determinar ciertas propiedades geométricas directamente, a partir de las observaciones de las imágenes que produce una lente. Este es el caso precisamente de 0957+561, como vemos más adelante.

Los parámetros representados por \bar{p} más arriba se relacionan con las tres clases de cantidades observables de imágenes (ver, por ejemplo, Bourassa y Kantowski 1975). La relación entre \bar{p} y las posiciones de imágenes surge del trazado de rayos de luz desde la fuente hasta el observador. De la Figura 1, por ejemplo, se deduce que, para una imagen situada en θ_i , como antes, tenemos:

$$(\theta_s - \theta_i) \frac{D_s}{D_{ds}} = \alpha(\bar{p}; \theta_i), \quad (2)$$

y para dos imágenes, tomando la diferencia de ecuaciones como (2) para la imagen i y la j , deducimos:

$$(\theta_j - \theta_i) \frac{D_s}{D_{ds}} = \alpha(\bar{p}; \theta_i) - \alpha(\bar{p}; \theta_j). \quad (3)$$

La ecuación (3) es independiente de la posición desconocida θ_s de la fuente.

Otra relación está dada por la matriz de magnificación relativa $[M_{ij}]$. Calculamos primero $[M_i]$, diferenciando la ecuación (2):

$$\begin{aligned} \delta \theta_s &= \delta \theta_i + \frac{D_{ds}}{D_s} [A_i] \delta \theta_i \\ &= \left([I] + \frac{D_{ds}}{D_s} [A_i] \right) \delta \theta_i, \end{aligned} \quad (4)$$

donde los elementos de $[A_i]$ son las derivadas parciales de las componentes Cartesianas de $\alpha(\bar{p}; \theta_i)$ con respecto a las componentes Cartesianas de $\theta_i \equiv (x_i, y_i)$, y $[I]$ es la matriz identidad. Las ecuaciones (2) y (4) implican que:

$$[M_i] = \left([I] + \frac{D_{ds}}{D_s} [A_i] \right)^{-1} \quad (5)$$

La matriz $[M]$ es simétrica y tiene solo tres elementos distintos, que representan dos magnificaciones *lineales* (en general desiguales), con signo y en direcciones ortogonales. Obtenemos así la matriz de magnificación relativa:

$$\begin{aligned} [M_{ij}] &\equiv [M_i][M_j]^{-1} \\ &= \left([I] + \frac{D_{ds}}{D_s} [A_i] \right)^{-1} \left([I] + \frac{D_{ds}}{D_s} [A_j] \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Aunque las matrices $[M_i]$ y $[M_j]$ son simétricas, $[M_{ij}]$ en general no lo es, y contiene cuatro elementos independientes. Entonces, $[M_{ij}]$ puede ser representada por dos valores propios reales y por los dos ángulos de posición de los vectores propios correspondientes (equivalentes a dos magnificaciones *lineales* paralelas a los vectores propios).

Finalmente, tenemos otra relación, dada por el retraso relativo para pares de imágenes. Para ángulos pequeños, el retraso geométrico es (Cooke y Kantowski 1975):

$$\Delta \tau_i^g = (1 + z_d) \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \frac{\alpha_i \cdot \alpha_i}{2}, \quad (7)$$

donde $\alpha_i \equiv \alpha(\bar{p}; \theta_i)$. El retraso potencial se deduce en la aproximación post-Newtoniana (ver, por ejemplo, Schneider 1985):

$$\Delta \tau_i^p = (1 + z_d) D_d P_i, \quad (8)$$

donde $P_i \equiv P(\theta_i)$, y $P(\bar{p}; \theta)$ es una función potencial en dos dimensiones para $\alpha(\bar{p}; \theta)$, tal que $\nabla P(\bar{p}; \theta) = \alpha(\bar{p}; \theta)$. Calculando la diferencia entre retrasos $\Delta \tau_i$ y $\Delta \tau_j$ para dos imágenes i y j , con la ayuda de la ecuación (3), obtenemos:

$$\Delta \tau_{ij} = (1 + z_d) D_d \left(-(\theta_i - \theta_j) \cdot \frac{\alpha_i + \alpha_j}{2} + P_i - P_j \right). \quad (9)$$

Esta forma de $\Delta \tau_{ij}$ demuestra claramente la dependencia del retraso con respecto a H_0 y la aditividad de contribuciones al retraso por distintas componentes de la lente.

V. EL SISTEMA 0957+561: OBSERVACIONES Y MODELOS

La Figura 2 demuestra la apariencia del sistema 0957+561 en frecuencias ópticas. Las imágenes A y B tienen el mismo corrimiento al rojo de 1.4136, y una separación de seis segundos de arco, aproximadamente (ver Tabla 1). Las imágenes A y B están rodeadas por un cúmulo que, de acuerdo con Young y sus colaboradores, contiene unas 150 galaxias. Solo dos corrimientos al rojo de estas galaxias han sido medidos hasta ahora; estos coinciden, y tienen un valor de 0.36. Una de estas galaxias, G1, se encuentra a solo un segundo de arco hacia el Norte a partir de la imagen B (ver Tabla 1), ha sido identificada como una cD (elíptica gigante), y es la más luminosa de las galaxias en el cúmulo.

Debido a la gran masa esperada en este tipo de galaxia, dada su luminosidad, G1 juega un papel preponderante en la lente gravitacional. El resto de las galaxias en el cúmulo se encuentran mucho más alejadas de las imágenes, tienen menor luminosidad, y deben tener un efecto mucho menor que el de G1 sobre A y B.

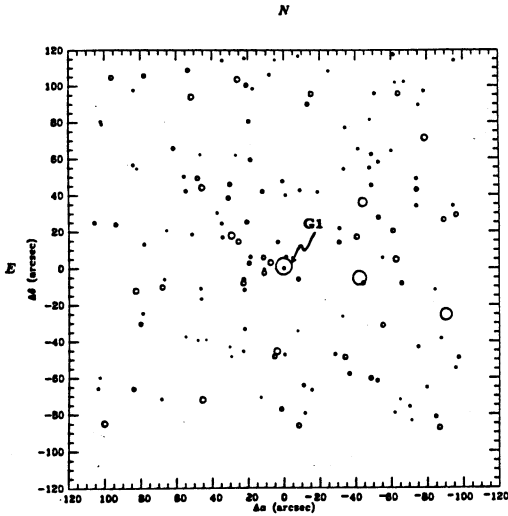


Figura 2. Campo observado por Young et al. (1981); los asteriscos representan a A y B (A está a ~ 6' al norte de B). Cada círculo representa a una galaxia. El área de cada círculo es proporcional a la luminosidad aparente de cada galaxia, y la galaxia G1 es la más brillante, con magnitud aparente $m_r \sim 18.5$.

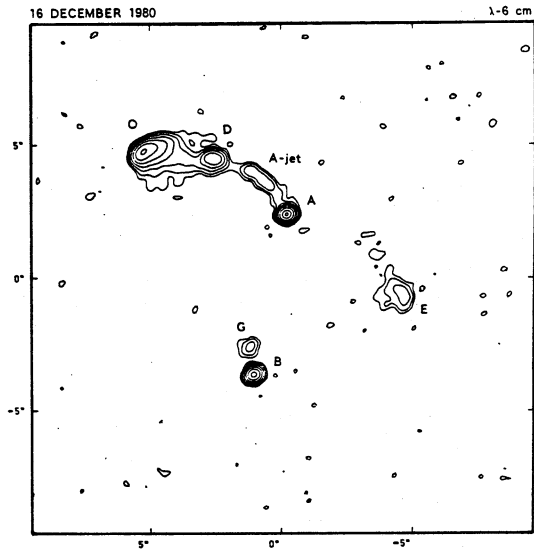


Figura 3. Mapa generado por Greenfield (1981) con el VLA en la longitud de onda de 6 cm. Las componentes A y B corresponden a las imágenes ópticas homónimas, y la fuente G corresponde a G1. Las componentes C, D, "A-jet" y E no tienen contrapartida óptica.

En frecuencias de radio, las imágenes A y B presentan ambas la estructura clásica de núcleo y chorro. La Figura 3 muestra la emisión de radio proveniente de 0957+561, determinada por Greenfield (1981) con el VLA. En los mapas de Greenfield y sus colaboradores, las imágenes A y B aparecen como fuentes puntuales, pero desde A emana un chorro de emisión hacia el Noreste. Como lo muestra la figura, este chorro es una imagen sin acompañante

cerca de B, en contraposición al núcleo de A. La Figura 4 muestra la estructura de las imágenes en la longitud de onda de 13 cm, determinada con VLBI (Bonometti 1985). Vemos así que A y B tienen un núcleo de emisión con una extensión de unos pocos milisegundos de arco. Además, ambos núcleos poseen chorros de emisión extendida sobre decenas de milisegundos de arco que nacen como pequeñas extensiones a partir de cada uno de los núcleos, y que apuntan hacia el Noreste, donde se encuentra la emisión descubierta con el VLA. A partir de los mismos datos que producen los mapas de la Figura 4, obtenemos las posiciones y la magnificación relativa de A y B. La cantidad clave que aún no ha sido determinada con la precisión deseada es el retraso relativo para A y B. Pese a que el quasar 0957+561 tiene fluctuaciones de hasta 20 % en períodos de meses y en frecuencias ópticas (Schild y Cholfn 1986), aún no se ha podido establecer una correlación convincente entre las variaciones de A y de B, contrariamente a publicaciones recientes (Florentin-Nielsen 1984). Aunque no tenemos un valor para el retraso, sí podemos predecir su valor, o al menos cotas sobre su valor, como discutimos en los últimos párrafos.

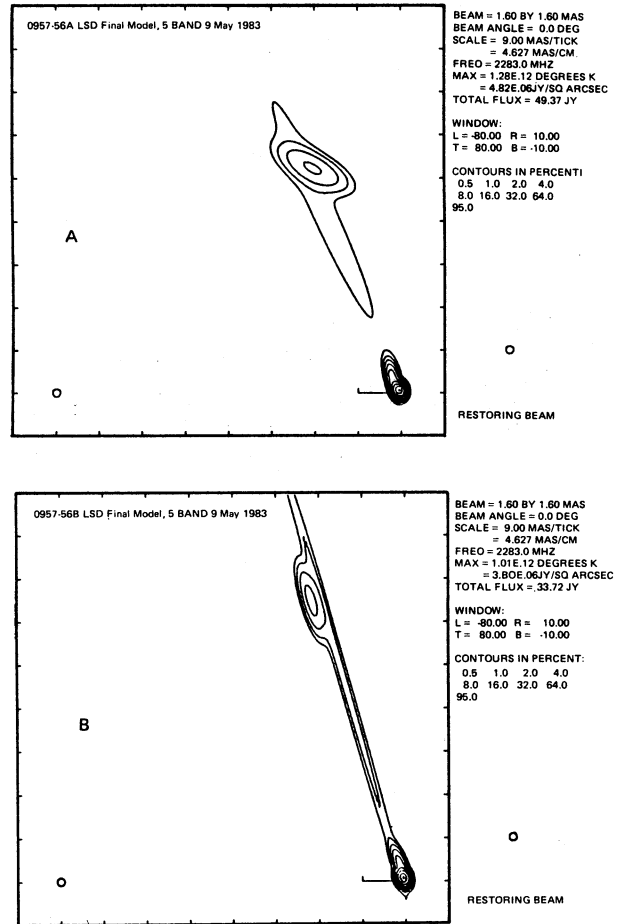


Figura 4. Mapa creado por Bonometti (1985) a partir de observaciones VLBI en la longitud de onda de 13 cm. Las componentes A y B corresponden a las imágenes observadas con el VLA.

Tabla 1. Propiedades observadas del sistema 0957+561, incluyendo a las imágenes y a la componente principal de la lente, la galaxia cD G1.

Corrimiento al rojo ^a de las imágenes $z_s = 1.4136 \pm 0.0004$ Corrimiento al rojo ^a de la galaxia G1 $z_d = 0.36 \pm 0.01$			
Coordenadas 1950.0 de A con respecto a B			
Tipo de Observación	x	y	
VLBI ^b	$-1''.25271 \pm 0''.00004$	$6''.04662 \pm 0''.00004$	
VLA ^c	$-1''.249 \pm 0''.001$	$6''.044 \pm 0''.001$	
Optica ^a	-1.23 ± 0.01	6.05 ± 0.01	
Matriz de magnificación relativa $[M_{BA}]^d$			
No.	Valor propio	No.	Angulo de posición $N \rightarrow E$
1	$+1.205 \pm 0.006$	3	$+18^\circ 89 \pm 0^\circ 08$
2	-0.53 ± 0.02	4	$-73^\circ 0 \pm 5^\circ 0$
Determinante de $[M_{BA}]$ VLBI ^d		Razón de flujos VLA ^c Opticos ^a	
-0.644 ± 0.023		0.733 ± 0.005 0.77 ± 0.03	
Coordenadas 1950.0 del centro de G1 con respecto a B			
Tipo de observación	x	y	
VLBI ^e (G')	$0''.181 \pm 0''.001$	$1''.029 \pm 0''.001$	
VLA ^c (G)	$0''.151 \pm 0''.001$	$1''.051 \pm 0''.001$	
Optica ^f (G1)	$0''.19 \pm 0''.03$	$1''.00 \pm 0''.03$	
Parámetros ^a de contornos elípticos de G1			
Elipticidad: $e \equiv 1 - b/a$		0.13 ± 0.01	
Angulo de posición $N \rightarrow E$: ψ		$53^\circ \pm 5^\circ$	

^a Young *et al.* (1981); ^b Cohen (1985); ^c Roberts *et al.* (1985); ^d Cohen *et al.* (1986);
^e Bonometti (1985); ^f Stockton (1980).

Los datos ópticos nos han permitido determinar un modelo muy simple que reproduce las imágenes observadas por Young y sus colaboradores (Falco, Gorenstein y Shapiro 1985). Con los datos más recientes obtenidos con VLBI, hemos logrado obtener un modelo todavía simple, pero suficiente dada la cantidad reducida de cantidades observables disponibles.

En nuestro nuevo modelo, adoptamos una descripción simplificada de cada componente de la lente. Primero notamos que el valor de la elipticidad de G1 determinado por Young es pequeño (ver Tabla 1), y por lo tanto suponemos que G1 posee simetría esférica. El ángulo de desviación de G1 tiene entonces la forma simple

$$\alpha_{G1}(\vec{p}; \theta) = -4\pi \Sigma_{G1}(\theta) \theta, \quad (10)$$

donde θ representa la distancia angular medida desde el centro de G1, y $\Sigma_{G1}(\vec{p}; \theta)$ es el promedio de la densidad superficial $\sigma_{G1}(\vec{p}; \theta)$ dentro de un radio $|\theta|$. En lugar de aproximar $\Sigma_{G1}(\theta)$ en la forma utilizada por Young y sus

colaboradores, que consiste en adoptar una forma funcional específica para la densidad superficial de G1, tales como los modelos de King (1966), operamos de manera independiente de funciones específicas. Nuestro modelo para G1 utiliza directamente como parámetros los valores $\Sigma_i \equiv \Sigma_{G1}(\theta_i)$ en la posición de cada imagen i . Sin embargo, la magnificación de cada imagen debida a G1 depende no solo de $\Sigma_{G1}(\theta)$, sino también de $\sigma_{G1}(\theta)$. Por consiguiente, el mínimo de parámetros necesarios para describir las propiedades observadas de cada imagen i son dos, Σ_i y $\sigma_i \equiv \sigma_{G1}(\theta_i)$. Llamamos a este modelo "discreto", porque sus parámetros son cantidades válidas solamente en posiciones discretas. Debido a que las imágenes A y B no están alineadas con G1, el cúmulo de galaxias debe contribuir apreciablemente a la desviación de la luz de 0957+561. Pero debemos recordar que la extensión del cúmulo es mucho mayor que la separación entre A y B. Es decir, la razón de escalas del cúmulo y de G1 es muy pequeña. Por lo tanto, suponemos que el cúmulo actúa como una perturbación de la desviación gravitacional producida por G1, o sea que utilizamos una serie de Taylor para el ángulo de desviación del cúmulo:

$$\alpha_c(\vec{p}; \alpha) = \alpha_o + [A_c]\theta, \quad (11)$$

donde $[A_c]$ es la matriz de derivadas parciales mencionada más arriba, evaluada en $\theta = 0$ (la expansión de Taylor se calcula en el centro de G1). La matriz $[A_c]$ a su vez se puede expresar como $[A_c] = -Q_S[I] + Q_A[\omega(\gamma)]$ (Falco, Gorenstein y Shapiro 1985), donde Q_S y Q_A son escalares y γ es un ángulo de posición tal que los elementos de $[\omega(\gamma)]$ son $[\omega(\gamma)]_{11} = -[\omega(\gamma)]_{22} = -\cos 2\gamma$, y $[\omega(\gamma)]_{12} = [\omega(\gamma)]_{21} = \sin 2\gamma$. Este modelo lo hemos denominado "cuadrupolo", debido a su dependencia angular.

El ángulo de desviación total producido por el modelo para cada imagen i es entonces $\alpha(\vec{p}; \theta_i) = -4\pi\Sigma_i\theta_i - Q_S[I]\theta_i + Q_A[\omega(\gamma)]\theta_i$. El modelo se simplifica aun más gracias a la transformación de magnificación que introducimos recientemente (Falco 1985). Esta es una de varias transformaciones posibles de ciertos modelos de lentes gravitacionales, que modifican sus parámetros, pero que no afectan las propiedades observables de las imágenes producidas por esos modelos. Por ejemplo, La transformación de magnificación permite eliminar la contribución de Q_S , o sea fijar $Q_S = 0$, y fijar (por ejemplo) $\sigma_A = 0$.

El modelo final consta de cinco parámetros: σ_B , Σ_B , Σ_A , Q_A y γ . Los parámetros para la lente en 0957+561 fueron calculados con un "paquete" general de programas de computadoras diseñados para ajustar los parámetros de modelos de lentes gravitacionales, con el propósito de minimizar una función χ^2 que mide la distancia entre las cantidades calculadas con el modelo, y las cantidades observadas, teniendo en cuenta las incertidumbres experimentales (Falco 1985). La Tabla 2 muestra los valores de los parámetros determinados con este programa, y la diferencia entre cantidades observadas y calculadas referentes a las imágenes. Las densidades obtenidas son razonables, y el modelo se ajusta muy bien a las cantidades observadas.

La única deficiencia del modelo discreto para G1 es que no es posible predecir la existencia de otras imágenes al no conocer $\sigma_{G1}(\theta)$ en posiciones diferentes de A y B, y no es posible calcular el valor del retraso $\Delta\tau_{BA}$ sin conocer $\sigma_{G1}(\theta)$ entre $|\theta_B|$ y $|\theta_A|$. Sí podemos calcular una cota superior del retraso, ya que podemos reordenar la distribución de masa de G1 entre $|\theta_B|$ y $|\theta_A|$, manteniendo fijos σ_B , Σ_B y Σ_A , de manera de maximizar $\Delta\tau_{BA}$. El resultado es $\Delta\tau_{BA} \leq (1.61 \pm 0.08)h^{-1}$ años, donde $H_0 = h \times 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Tabla 2. Valores de los parámetros del modelo, y comparación de las propiedades de las imágenes observadas con las que predice el modelo. Las coordenadas Cartesianas angulares de A con respecto a B son (x_A, y_A) ; los valores propios de la matriz de magnificación $[M_{BA}]$ son λ_i , donde $i = 1$ o 2 , y los ángulos de posición $N \rightarrow E$ de los vectores propios correspondientes son ψ_i .

No.	Parámetro	Valor estimado
1	σ_B	1.26 ± 0.01
2	Σ_B	2.53 ± 0.02
3	Σ_A	0.444 ± 0.007
4	Q_A	0.43 ± 0.01
5	γ	$63^\circ.3 \pm 0^\circ.6$

Coeficientes de correlación				
No.	1	2	3	4
2	0.984			
3	0.713	0.738		
4	-0.841	-0.865	-0.977	
5	-0.918	-0.939	-0.924	0.984

Comparación del modelo y de las observaciones			
No.	Propiedad	Observación - Predicción	
1	x_A	$<. 0''.000001 \pm 0''.00004$	
2	y_A	$<. 0''.000001 \pm 0''.00004$	
3	λ_1	-0.0006 ± 0.006	
4	λ_2	-0.002 ± 0.02	
5	ψ_1	$0^\circ.02 \pm 0^\circ.08$	
6	ψ_2	$5^\circ.7 \pm 5^\circ.0$	

Valor final de $\chi^2 \sim 1.32$

^aLas densidades de superficie están dadas en unidades de la densidad crítica $\sigma_f \equiv D_d D_s / 4\pi D_d$ (Falco 1985).

Concluimos que nuestro modelo es aceptable, dadas las restricciones puestas por el reducido número de cantidades observables. Con nuestras próximas observaciones VLBI de 0957+561 esperamos poder confirmar la validez de nuestro modelo para la lente, y tal vez determinar el retraso para A y B. Esta última posibilidad depende de la cooperación del quasar, pero la historia anterior de la

fuerza nos permite ser optimistas. Varias observaciones ópticas ya planeadas, tales como una vigilancia continua de las imágenes, la determinación de la dispersión de velocidad de G1, y un programa para medir los corrimientos al rojo de todas las galaxias en el cúmulo, sin duda nos permitirán perfeccionar nuestro modelo.

REFERENCIAS

- Bonometti, R.J. 1985, Tesis Ph. D., M.I.T.
 Bourassa, R.R. y Kantowski, R. 1975, *Ap. J.*, 195, 13.
 Cohen, N.L. 1985, Tesis Ph. D., Universidad de Cornell.
 Cohen, N.L. *et al.* 1986, en preparación.
 Cooke, J.H. y Kantowski, R. 1975, *Ap. J. (Letters)*, 195, L11.
 Falco, E.E. 1985, Tesis Ph. D., M.I.T.
 Falco, E.E., Gorenstein, M.V., y Shapiro, I.I. 1985, *Ap. J. (Letters)*, 289, L1.
 Florentin-Nielsen, R. 1984, *Astr. and Ap.*, 138, L19.
 Greenfield, P.E. 1981, Tesis Ph. D. M.I.T.
 Huchra, J., Gorenstein, M., Kent, S., Smith, G., Horine, E., y Perley, R., *Astron. J.*, 90 (5), 691.
 King, I.R. 1966, *Astron. J.*, 71 (1), 64.
 Roberts, D.H., Greenfield, P.E., Hewitt, J.N., Burke, B.F., y Dupree, A.K. 1985, *Ap. J.*, 293, 356.
 Schild, R. y Chofin, B. 1986, preprint, Center for Astrophysics.
 Schneider, P. 1985, *Astr. and Ap.*, 143, 413.
 Stockton, A. 1980, *Ap. J. (Letters)*, 242, L141.
 Walsh, D., Carswell, R.F., y Weymann, R.J. 1979, *Nature*, 279, 381.
 Weinberg, S. 1972, *Gravitation and Cosmology* (New York: John Wiley & Sons).
 Young, P., Gunn, J.E., Kristian, J., Oke, J.B., y Westphal, J.A. 1981, *Ap. J.*, 244, 736.

Emilio E. Falco: Harvard-Smithsonian Ctr. for Astrophysics, 60 Garden Street, Cambridge, MA 02138, E.U.A.