Rev. Mexicana Astron. Astrof., 15, 65-72 (1987)

SUPERPOSICION DE SISTEMAS ESTELARES. II

Rosa Ma. Ros

Departamento de Física de la Atmósfera, Astronomía y Astrofísica
Universidad de Barcelona, España

Received 1987 January 6

RESUMEN

Explicamos el comportamiento cinemático de las estrellas del entorno solar suponiendo la superposición de dos poblaciones estelares. Consideramos ambas poblaciones regidas por un mismo potencial gravitatorio, estacionario, a simetría cilíndrica y separable, que nos conduce a imponer condiciones a la función de distribución del conjunto.

La superposición de las conocidas poblaciones estelares I y II, regidas ambas por dos sencillas funciones de distribución de Schwarzschild, explica satisfactoriamente los parámetros observados en el entorno solar.

ABSTRACT

We explain the kinematic behaviour of the stars of the solar neighbourhood supposing the superposition of two stellar populations. We consider both populations governed by a gravitational potential, stationary, with cylindrical symmetry and separable, which led us to impose conditions to the total distribution function.

The superposition of the well-known stellar populations I and II, both governed by two simple distribution functions of Schwarzschild, explains satisfactorily the parameters observed in the solar neighbourhood.

Key words: GALAXY-KINEMATICS AND DYNAMICS – GALAXY-STRUCTURE – SOLAR NEIGHBOURHOOD

I. INTRODUCCION

Las funciones de distribución propuestas para describir el entorno solar son, básicamente cuadráticas en las velocidades residuales, lo cual implica la ausencia de momentos de orden impar, en evidente contradicción con los resultados numéricos de que disponemos (Erickson 1975). Estas consideraciones nos llevaron a confeccionar un modelo que explicara mejor el entorno solar (Ros 1983). Aplicamos allí el principio de superposición a dos poblaciones cuyas funciones de distribución eran normales en las tres variables. Las fórmulas que entonces dedujimos nos permitieron explicar la presencia de todos los momentos observados y calcular los distintos parámetros de ambas poblaciones.

Al suponer que el campo gravitatorio creado por el sistema estelar deriva de un potencial estacionario, a simetría cilíndrica y separable, admitimos una función de distribución de tres integrales primeras F(I,J,K) (Ros 1985). Presentamos ahora un modelo de superposición más simplificado, desarrollando las fórmulas en las clásicas coordenadas cilíndricas, particularizamos pues, a una función de dos argumentos $F(I + \lambda K, J)$ y observamos que para ambas funciones de distribución sus momentos no nulos son los mismos que Erickson puso de manifiesto y que nosotros calculamos para distintas muestras (Ros 1983). Así mismo para éstas últimas funciones $F(I + \lambda K, J)$ se deducen además varias relaciones entre sus momentos, relaciones que en el último capítulo vemos que se verifican.

Revisamos pues, el principio de superposición de dos poblaciones cuyas funciones de distribución sean de Schwarzschild, adoptando como función de distribución del conjunto una función del tipo $F(I + \lambda K, J)$ lo cual nos permite reformular de manera más sencilla las fórmulas obtenidas en anteriores publicaciones (Ros 1983, 1985). Con objeto de comprobar numéricamente los resultados conseguidos por la superposición en estas condiciones, aplicamos las nuevas fórmulas a las mismas muestras ya consideradas en trabajos anteriores, los resultados obtenidos corroboran nuestros actuales conocimientos sobre los movimientos de las estrellas en el entorno solar.

II. MODELO SIMPLIFICADO DE SUPERPOSICION

Para describir la distribución de las velocidades de las estrellas del entorno del Sol, consideramos los momentos centrados de su función de distribución. Consecuencia de las características de la muestra de estrellas de nuestra galaxia, podemos suponer que dicho conjunto constituye un sistema conservativo, sin encuentros ni colisiones, siendo de carácter gravitatorio las fuerzas que interaccionan las mismas. Así mismo, según se detalla en Ros (1985), adoptamos un potencial estacionario, a simetría cilíndrica y separable en ϖ y z. En estas hipótesis la función de distribución solo puede escribirse como función de tres integrales primeras I, J, K. Siendo salvo constantes aditivas:

$$\left.\begin{array}{l} I = \Pi^2 + \Theta^2 = \text{const.} \\ J = \quad\quad \Theta = \text{const.} \\ K = \quad\quad Z^2 = \text{const.} \end{array}\right\} . \qquad (1)$$

Siendo Π, Θ y Z las componentes de la velocidad en un sistema de coordenadas cilíndricas que gire con velocidad Θ alrededor del eje de simetría z. Para estas funciones de distribución pares en Π y en Z, los únicos momentos distintos de cero, además del momento centrado de orden cero que es la unidad, son los:

$$\left.\begin{array}{llllll} \mu_{\varpi\varpi} & \mu_{\theta\theta} & \mu_{zz} & \mu_{\varpi\varpi\theta} & \mu_{\theta\theta\theta} & \mu_{\theta zz} \\ \mu_{\varpi\varpi\varpi\varpi} & \mu_{\varpi\varpi\theta\theta} & \mu_{\varpi\varpi zz} & \mu_{\theta\theta\theta\theta} & \mu_{\theta\theta zz} & \mu_{zzzz} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

que aparecen al considerar diversas muestras estelares.

Restringiendo ahora la función de distribución que adoptamos en el artículo anteriormente mencionado, supongamos que, en particular dicha función es de la forma (Orús 1977):

$$f = F(I+\lambda K, J) \ , \qquad (3)$$

donde λ es una constante. Al sustituir (1) en esta función (3) e introduciéndola en las integrales que definen los momentos centrados, al ir variando las distintas potencias de las componentes de las velocidades residuales, entre los doce momentos de (2) se deducen ciertas proporcionalidades, sin más que considerar la transformación de coordenadas:

$$\Pi = R\cos\phi \ , \qquad\qquad Z = (R\sin\phi)/\sqrt{\lambda} \ ; \qquad (4)$$

donde, evidentemente, $0 \leq R \leq +\infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ y cuyo jacobiano es $R/\sqrt{\lambda}$.

Al introducir en los distintos momentos esta transformación (4), se deduce (véase Orús 1977):

$$\lambda = \frac{\mu_{\varpi\varpi}}{\mu_{zz}} = \frac{\mu_{\varpi\varpi\theta}}{\mu_{\theta zz}} = \frac{\mu_{\varpi\varpi\theta\theta}}{\mu_{\theta\theta zz}} = \frac{\mu_{\varpi\varpi\varpi\varpi}}{3\mu_{\varpi\varpi zz}} = \frac{3\mu_{\varpi\varpi zz}}{\mu_{zzzz}} \ ; \qquad (5)$$

fórmulas que nos serán de gran utilidad más adelante al considerar la superposición de dos subsistemas.

En general, las funciones de distribución adoptadas para explicar el entorno solar, son funciones de Schwarzschild, que no admiten momentos de orden impar distintos de cero. Pero al publicar Erickson (1975), los momentos centrados hasta cuarto orden para una muestra de estrellas perteneciente al catálogo de Gliese (1969), evidenció la existencia de momentos de tercer orden no nulos. Para solventar esta discrepancia presentamos anteriormente (Ros 1985), un modelo de superposición de dos funciones de distribución normales en las tres variables, o de Schwarzschild. Llamando f a la función de distribución de la totalidad del sistema y ψ' y ψ'' a las respectivas funciones de distribución de Schwarzschild de ambos subsistemas. Para las funciones ψ' y ψ'' sus momentos en $'$ y en $''$ verifican las relaciones (Orús 1977):

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_{\varpi\varpi\varpi\varpi} = 3\mu_{\varpi\varpi}^2 & \mu_{\varpi\varpi\theta\theta} = \mu_{\varpi\varpi}\,\mu_{\theta\theta} \\ \mu_{\varpi\varpi zz} = \mu_{\varpi\varpi}\,\mu_{zz} & \mu_{\theta\theta\theta\theta} = 3\mu_{\theta\theta}^2 \\ \mu_{zzzz} = 3\mu_{zz}^2 & \mu_{\theta\theta zz} \quad \mu_{\theta\theta}\,\mu_{zz} \end{array}\right\} . \qquad (6)$$

Para ambas funciones ψ' y ψ'', hasta el cuarto orden, los que figuran en (6), además del momento de orden cero que vale uno, son los únicos momentos no nulos. Mientras que para la función f superposición de ψ' y ψ'' los momentos distintos de cero son los que figuran en (2).

Al adoptar ahora, la función de distribución total f del tipo (3), el desarrollo del modelo de superposición anterior (Ros 1985) se simplificará notablemente. Para su presentación definimos los parámetros γ_i, de forma análoga a los ρ_i ya introducidos, y que ahora recordamos para facilitar la presente lectura:

$$\left.\begin{array}{lll} \gamma_1 = \mu_{\varpi\varpi\theta}/\mu_{\varpi\varpi} & \gamma_2 = \mu_{\theta\theta\theta}/(3\mu_{\theta\theta}) & \gamma_3 = \mu_{\theta zz}/\mu_{zz} \\ \rho_1 = \mu_{\varpi\varpi\varpi\varpi}/(3\mu_{\varpi\varpi}^2) & \rho_2 = \mu_{\varpi\varpi zz}/(\mu_{\varpi\varpi}\,\mu_{zz}) & \rho_3 = \mu_{zzzz}/(3\mu_{zz}^2) \\ \rho_4 = \mu_{\varpi\varpi\theta\theta}/(\mu_{\varpi\varpi}\,\mu_{\theta\theta}) & \rho_5 = \mu_{\theta\theta\theta\theta}/(3\,\mu_{\theta\theta}^2) & \rho_6 = \mu_{\theta\theta zz}/(\mu_{\theta\theta}\,\mu_{zz}) \end{array}\right\} . \qquad (7)$$

Al considerar las fórmulas de la superposición se deducen las relaciones siguientes, que usaremos en los cálculos numéricos posteriores:

$$(\rho_1 - 1)(\rho_3 - 1) = (\rho_2 - 1)^2 \ , \qquad (8)$$

$$\bar{\rho}_5 - 1 = (\rho_4 - 1)^2/(\rho_1 - 1) = (\rho_6 - 1)^2/(\rho_2 - 1) \ , \qquad (9)$$

$$-\,\gamma^{\frac{1}{2}} = \gamma_1/(\rho_1 - 1)^{\frac{1}{2}} = \gamma_3/(\rho_3 - 1)^{\frac{1}{2}} \ , \qquad (10)$$

$$-\,\gamma^{\frac{1}{2}} = \gamma_2(\bar{\rho}_5 - 1)^{\frac{1}{2}} - 2q(q-1)(D/(1+q))^3/(3(\bar{\rho}_5 - 1)^{\frac{1}{2}}\,\mu_{\theta\theta}) \ ; \qquad (11)$$

siendo q el cociente entre los tantos por uno de población I y II, y D la diferencia entre las velocidades residuales de los centroides de ambas poblaciones.

Por la definición de los momentos resulta evidente que los de orden par serán positivos y en consecuencia, según (7), también lo serán los ρ_i. Por el contrario, al calcular los momentos de tercer orden para distintas muestras (Erickson 1975; Ros 1985) observamos que son negativos y, por tanto, también deben serlo los γ_i. Precisamente es considerando ésto último, como en las fórmulas (10) y (11) hemos elegido la determinación de la raíz conveniente para la aplicación posterior de esta teoría, como así seguiremos haciendo en lo sucesivo.

El proceso que permite resolver la superposición y calcular los tantos por uno n′ y n″ de ambas poblaciones I y II, así como la diferencia D entre las velocidades de los centroides, fue ya expuesto en su momento (véase Ros 1985). Definimos ahora los momentos parciales normalizados de segundo orden s'_{ii} y s''_{ii}, que nos facilitan el estudio de las distintas muestras, así como ciertas acotaciones que a continuación deduciremos. Introduzcamos pues para cada subsistema:

$$s'_{ii} \equiv \mu'_{ii}/\mu_{ii} \qquad s''_{ii} \equiv \mu''_{ii}/\mu_{ii} \; . \tag{12}$$

Las relaciones (12) junto con las expresiones obtenidas para los momentos parciales en Ros (1985) nos permiten establecer ciertas desigualdades entre los momentos parciales de segundo orden, que nos serán de gran utilidad posteriormente en los cálculos relativos a varias muestras. En este sistema serán datos $\mu_{\theta\theta}$ y los γ_i y ρ_i calculados por (7) a partir de los momentos totales de la muestra. Dichas condiciones cuya demostración no presenta gran dificultad, y que a continuación resuminos, son las siguientes:

$$S''_{\omega\omega} > \rho_1 \quad , \quad S''_{zz} > \rho_3 \tag{13}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S'_{\omega\omega} > S'_{\theta\theta} \quad , & S'_{zz} > S'_{\theta\theta} \\ S''_{\omega\omega} > S''_{\theta\theta} \quad , & S''_{zz} > S''_{\theta\theta} \end{array}\right\} \tag{14}$$

$$S''_{\omega\omega} > S'_{\omega\omega} \quad , \quad S''_{\theta\theta} > S'_{\theta\theta} \quad , \quad S''_{zz} > S'_{zz} \; ; \tag{15}$$

además de las acotaciones para n″, el tanto por uno de población II:

$$1/n'' > \rho_1 \quad , \quad 1/n'' > \rho_3 \; , \tag{16}$$

y de las relaciones siguientes para los ρ_i:

$$\rho_1 < \rho_4 < \bar{\rho}_5 \quad , \quad \rho_3 < \rho_6 < \bar{\rho}_5 \quad , \quad \rho_5 < \bar{\rho}_5 \; . \tag{17}$$

Sin más que considerar las definiciones (12) tenemos según (15):

$$\mu''_{\omega\omega} > \mu'_{\omega\omega} \quad , \quad \mu''_{\theta\theta} > \mu'_{\theta\theta} \quad , \quad \mu''_{zz} > \mu'_{zz} \; ; \tag{18}$$

es decir, el elipsoide de velocidades correspondiente a las estrellas de la población II contiene en su interior al correspondiente a las estrellas de la población I.

Como se ha mencionado antes, los conocimientos de que disponemos del entorno solar, nos llevan a considerar la función de distribución f del tipo (3). Las funciones de Schwarzschild adoptadas para los subsistemas podemos expresarlas de la forma (tanto en ′ como en ″):

$$\psi' \propto e^{-(\frac{1}{2})(\frac{1}{\mu'_{\omega\omega}}(\Pi^2 + \frac{\mu'_{\omega\omega}}{\mu'_{zz}} Z^2) + \frac{1}{\mu'_{\theta\theta}}(\Theta - \Theta'_0)^2} = F'(\Pi^2 + \frac{\mu'_{\omega\omega}}{\mu'_{zz}} Z^2, \Theta) \; . \tag{19}$$

En consecuencia la superposición, según (1), (3) y (19) se expresa:

$$F(\Pi^2 + \lambda Z^2, \Theta) = F'(\Pi^2 + \frac{\mu'_{\omega\omega}}{\mu'_{zz}} Z^2, \Theta) + F''(\Pi^2 + \frac{\mu'_{\omega\omega}}{\mu'_{zz}} Z^2, \Theta), \tag{20}$$

y por tanto el parámetro λ deber ser común:

$$\lambda = \frac{\mu'_{\omega\omega}}{\mu'_{zz}} = \frac{\mu'_{\omega\omega}}{\mu'_{zz}} \; . \tag{21}$$

En estas condiciones, disponemos pues ahora de un nuevo sistema de catorce ecuaciones, las trece del sistema de superposición (véase Ros 1985) junto a la (21), con nueve incógnitas, los seis momentos parciales, n′, n″ y D.

Introduciendo esta proporción (21) en el sistema se deducen las igualdades (5) que se satisfacen cumplidamente para todas las muestras consideradas. LLevando ahora (5) a (7) se deducen las siguientes igualdades, que nos permitirán simplificar notablemente los desarrollos a efectuar:

$$\left.\begin{array}{c} \gamma_1 = \gamma_3 \\ \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \\ \rho_4 = \rho_6 \end{array}\right\} . \tag{22}$$

Al estudiar distintas muestras de estrellas próximas al Sol (Ros 1985), ya habíamos observado que, con mucha aproximación, se verificaban las relaciones (22), hecho que no sabíamos justificar y que ahora, al considerar la función de distribución del tipo (3) queda fácilmente explicado. Aplicando pues (22) a las fórmulas de la superposición, (8) se satisface idénticamente y, adoptando como variables γ_1, ρ_1 y ρ_4, (9) se reduce a:

$$\bar{\rho}_5 - 1 = (\rho_4 - 1)^2/(\rho_1 - 1) \tag{23}$$

Además, según (22) y (23), las fórmulas (10) y (11) se escriben:

$$-\gamma^{\frac{1}{2}} = \gamma_1/(\rho_1 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad , \tag{24}$$

$$-\gamma^{\frac{1}{2}} = \gamma_2(\rho_1 - 1)^{\frac{1}{2}}/(\rho_4 - 1) \cdot - 2q(q-1)(\rho_1 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$(D/(1-q))^3/((\rho_4 - 1)\mu_{\theta\theta}) \ . \tag{25}$$

Y los momentos parciales de segundo orden normalizados (12) se pueden expresar como:

$$S'_{\varpi\varpi} = S'_{zz} = 1 - ((\rho_1 - 1)/q)^{\frac{1}{2}} \tag{26}$$

$$S''_{\varpi\varpi} = S''_{zz} = 1 + ((\rho_1 - 1)q)^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

$$S'_{\theta\theta} = 1 - (\rho_4 - 1)/((\rho_1 - 1)q)^{\frac{1}{2}} - (D/(1+q))^2/\mu_{\theta\theta} \tag{28}$$

$$S''_{\theta\theta} = 1 + (\rho_4 - 1)/((\rho_1 - 1)/q)^{\frac{1}{2}} - (qD/(1+q))^2/\mu_{\theta\theta} \ . \tag{29}$$

Al aceptar la función de distribución del tipo (3) tenemos ahora un sistema más sencillo que el anterior pues, considerando las cuatro igualdades (22), el sistema de catorce ecuaciones queda reducido a diez ecuaciones, a saber: ($n' + n'' = 1$), (23),(24),(25), las dobles igualdades (26), (27), (28) y (29), con nueve incógnitas: los seis momentos parciales normalizados, n', n'' y D. Podemos pues resolver el sistema tomando como condición de cierre la fórmula (25).

Al aplicar el sistema de diez ecuaciones a cada muestra, serán datos todos los momentos centrados de dicha muestra, en particular $\mu_{\theta\theta}$, y, según (7), γ_1, γ_2, ρ_1, ρ_4 y ρ_5.

El proceso a seguir será aplicar las fórmulas de la superposición (Ros 1985) para deducir los tantos por uno (n', n'') de las poblaciones I y II de la muestra, así como la diferencia D entre las velocidades de los centroides. Los momentos parciales normalizados se calculan mediante (26 – 29) y, finalmente, disponemos como cierre de la relación (25), en la cual podemos sustituir todos los valores y comprobar que se satisface cumplidamente.

En nuestro modelo, al ser iguales los momentos parciales normalizados $\varpi\varpi$ y zz, las desigualdades (13), (14) y (15) se reducen, respectivamente a:

$$S''_{\varpi\varpi} = S''_{zz} > \rho_1 = \rho_3 \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned} S'_{\varpi\varpi} = S'_{zz} > S'_{\theta\theta} \ , \\ S''_{\varpi\varpi} = S''_{zz} > S''_{\theta\theta} \ , \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$S''_{\varpi\varpi} = S''_{zz} > S'_{\varpi\varpi} = S'_{zz} \quad , \quad S''_{\theta\theta} > S'_{\theta\theta} \ ; \tag{32}$$

condiciones que como veremos, se satisfacen complidamente al considerar los resultados numéricos. Además, según (16) y (17), finalmente:

$$1/n'' > \rho_1 \ , \tag{33}$$

$$\rho_1 < \rho_4 < \bar{\rho}_5 \quad , \quad \rho_5 < \bar{\rho}_5 \ . \tag{34}$$

Es importante resaltar que en las fórmulas finales sólo aparece un momento total de forma explícita, el $\mu_{\theta\theta}$; el resto sólo son variables auxiliares y cocientes γ_i, ρ_i. Este hecho nos conducirá cuando procedamos a aplicar nuestro modelo a una muestra en concreto: tomaremos entonces $\mu_{\theta\theta}$ igual a su valor central y escogeremos para cocientes γ_i y ρ_i los valores pertenecientes a los intervalos intersección que satisfagan (22).

III. RESULTADOS

Para interpretar el entorno solar se define las siguientes muestras: las muestras 1 y 2 formadas respectivamente por estrellas gigantes y enanas, seleccionadas a partir de los catálogos de Eggen (1961 y 1964); la muestra 3 está construída a partir de las estrellas con datos suficientes, incluyendo enanas blancas y subenanas (Erickson 1975) y la muestra 4 del catálogo de Eggen (1961). Una discusión más amplia de estas muestras se dan en Ros (1985).

Las muestras cuyos momentos introduciremos como datos en las fórmulas deducidas en el apartado anterior, serán las mismas muestras que utilizamos cuando aplicamos la superposición sin considerar la proporción (21) (Ros 1985).

Las muestras deben estar formadas por estrellas próximas al Sol (para satisfacer las hipótesis adoptadas) y con los datos suficientes para poder calcular sus momentos.

Según la teoría, para cada muestra deberían ser distintos de cero los momentos que aparecen en la lista (5) y ser nulos todos los demás, es decir, presentar errores iguales o superiores a sus valores centrales. Esto es lo que sucedería si se verificasen cumplidamente todas las hipótesis admitidas con respecto al potencial galáctico; como que éstas sólo son ciertas en primera aproximación, no puede ser tan preciso el comportamiento a esperar por parte de los diferentes momentos. Observamos anteriormente (véase tablas 1 y 2 de Ros 1985) que, en cada caso, los momentos de cierto orden que tienen mayores los márgenes de error se corresponden con los que deberían ser nulos, mientras que los momentos con menores errores son los que hemos supuesto distintos de cero en (5); lo cual justifica las hipótesis aceptadas. Debemos exceptuar los momentos "prohibidos" $\mu_{\varpi\theta}$ y $\mu_{\varpi z}$ que, como hacen la mayoría de los autores, hemos despreciado para simplificar los desarrollos.

TABLA 1

INTERVALOS DE VARIACION DE LOS PARAMETROS γ_i, ρ_i DEFINIDOS EN LA RELACION (7)[a]

Parámetro	Muestra 1		Muestra 2		Muestra 3		Muestra 4	
$\mu_{\theta\theta}$	930 km^2 s^{-2}		3050 km^2 s^{-2}		600 km^2 s^{-2}		730 km^2 s^{-2}	
	Límite		Límite		Límite		Límite	
	Inf.	Sup.	Inf.	Sup.	Inf.	Sup.	Inf.	Sup.
γ_1	−83.28	−15.64	−118.75	−67.37	−13.52	−7.46	−34.22	−19.14
γ_2	−75.41	−14.62	− 69.29	−45.46	− 9.22	−6.00	−30.67	−18.40
γ_3	−50.77	−20.48	−127.14	−52.04	− 9.23	−3.20	−24.24	−16.77
ρ_1	1.31	5.65	2.19	4.87	0.98	1.68	2.01	3.87
ρ_2	1.54	4.70	2.09	48.66	1.43	2.62	2.09	3.52
ρ_3	1.80	12.40	1.67	30.61	1.19	2.27	1.99	4.33
ρ_4	1.73	33.55	4.76	9.88	1.40	2.32	3.62	7.60
ρ_5	2.47	31.83	3.96	7.06	1.26	1.85	4.13	9.13
ρ_6	2.62	8.97	3.58	8.48	1.29	2.31	2.72	4.06

a. La explicación de las muestras se da en el texto.

TABLA 2

INTERVALOS DE VARIACION DE LOS PARAMETROS γ_i, ρ_i DEFINIDOS EN LA RELACION (7) AL SUPONER LA FUNCION DE DISTRIBUCION DEL TOTAL DEL TIPO F(I + λK, J)[a]

Parámetro	Muestra 1		Muestra 2		Muestra 3		Muestra 4	
$\mu_{\theta\theta}$	930 km^2 s^{-2}		3050 km^2 s^{-2}		600 km^2 s^{-2}		730 km^2 s^{-2}	
	Límite		Límite		Límite		Límite	
	Inf.	Sup.	Inf.	Sup.	Inf.	Sup.	Inf.	Sup.
$\gamma_1 = \gamma_3$	−50.77	−20.48	−118.75	−67.37	−9.23	−7.46	−24.24	−19.14
γ_2	−75.41	−14.62	− 69.29	−45.46	−9.22	−6.00	−30.67	−18.40
$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$	1.80	4.70	2.19	4.87	1.43	1.68	2.09	3.52
$\rho_4 = \rho_6$	2.62	8.97	4.76	8.48	1.40	2.31	3.62	4.06
ρ_5	2.47	31.83	3.96	7.06	1.26	1.85	4.13	9.13

a. La explicación de las muestras se dan en el texto.

Para las muestras seleccionadas, vamos a considerar los posibles valores de los distintos cocientes definidos en (7), obteniendo en cada caso los parámetros que caracterizan a ambas poblaciones I y II. Al hacerlo, para las distintas muestras, contrastamos los porcentajes de población II deducidos con los publicados por diversos autores.

Debido al papel especial que juega el momento $\mu_{\theta\theta}$ en el desarrollo de las fórmulas finales, que aplicamos a cada muestra, adoptamos $\mu_{\theta\theta}$ igual al valor central correspondiente (tablas 1 y 2 de Ros 1985). Consideramos, entonces, los valores extremos de los γ_i y ρ_i sin más que sustituir en (7) los respectivos momentos que calculamos (Ros 1985) y construimos la tabla 1. En esta tabla se observa que pueden verificarse las relaciones (22), dado que los respectivos intervalos de variación tienen intersección no trivial. Esta zona de intersección es la que figura en la tabla 2. Las relaciones (22) relativas a los ρ_i observamos que se satisfacen bastante bien, mientras que para los γ_i la igualdad requerida es más forzada, esto lo atribuimos a que los márgenes de error de los momentos correspondientes son análogos para los ρ_i (i = 1, 2,3,4,6), mientras que en el caso de los γ_i (i = 1,3) hay siempre un momento mucho peor determinado que el otro.

Para cualquiera de las cuatro muestras confecciona-

TABLA 3

INTERVALOS DE VARIACION DEL TANTO POR UNO DE POBLACION II, DE LA DIFERENCIA DE VELOCIDADES DE LOS CENTROIDES (EN km s^{-1}) Y DE LOS MOMENTOS PARCIALES NORMALIZADOS DE SEGUNDO ORDEN[a]

Parámetro	Muestra 1		Muestra 2		Muestra 3		Muestra 4	
No. de Interacciones con solución	947		503		47		641	
	Límite		Límite		Límite		Límite	
	Inf.	Sup.	Inf.	Sup.	Inf.	Sup.	Inf.	Sup.
D	40	311	91	349	19	83	35	112
n″	0.01	0.17	0.01	0.16	0.02	0.46	0.03	0.20
$S'_{\omega\omega} = S'_{zz}$	0.24	0.94	0.15	0.81	0.28	0.91	0.20	0.82
$S''_{\omega\omega} = S''_{zz}$	3.06	26.61	5.21	19.87	1.84	5.63	3.99	7.82
$S'_{\theta\theta}$	0.01	0.81	0.01	0.61	0.03	0.77	0.01	0.55
$S''_{\theta\theta}$	0.06	23.28	0.12	5.95	0.77	2.59	1.19	5.32
No. de estrellas	1059		1175		869		3483	

a. La explicación de las muestras se dan en el texto.

das seguimos el siguiente esquema de trabajo, esto es, adoptamos el valor central del momento $\mu_{\theta\theta}$ y consideramos los intervalos intersección (tabla 2) de los parámetros que satisfacen (22). Los márgenes de variación de γ_i y ρ_i son muy amplios en algunos casos y, por tanto, no son representativos los valores medios de estos parámetros. Consideramos entonces, los diferentes valores de γ_1, ρ_1, ρ_4 y ρ_5, a intervalos parciales de una unidad, cinco décimas ó una décima, según sea la amplitud del intervalo total considerado para cada parámetro. Para cada uno de estos conjuntos de cuatro valores de γ_1, ρ_1, ρ_4 y ρ_5 aplicamos las fórmulas de la superposición que nos permiten calcular n′, n″, D y los seis momentos parciales reducidos correspondientes a cada tipo de población. Finalmente utilizamos (25) como condición de cierre, y considerando los resultados anteriores deducimos γ_2, único parámetro que no había intervenido hasta el momento. Si éste satisface la tabla 2, concluímos la bondad de la solución estudiada.

Al variar γ_1, ρ_1, ρ_4 y ρ_5 de menor a mayor, según hemos indicado, obtenemos acotaciones para el porcentaje de población II: n″, la diferencia de velocidades de los centroides de ambas poblaciones D y los momentos parciales reducidos de segundo orden S'_{ii} y S''_{ii} (tabla 3). Estos intervalos de variabilidad son muy amplios debido a los importantes errores con que conocemos los momentos totales de cada muestra. En tanto no dispongamos de catálogos estelares más completos y "uniformes", no podemos precisar más los momentos y en consecuencia nos será imposible alcanzar resultados más concretos.

Como los extremos de los diferentes resultados relativos a ambas poblaciones no son muy representativos, damos también las medias aritméticas y sus desviaciones típicas (entre paréntesis) correspondientes a todas las iteraciones llevadas a cabo (tabla 4).

En éstas condiciones, al satisfacer la relación (21), nuestro modelo nos conduce a unas fórmulas más sencillas que las deducidas en el caso general (Ros 1985), y, en consecuencia, los resultados son más estrictos. Aprovechando la mayor simplicidad conseguida en los desarrollos teóricos, hemos estudiado las mismas muestras que en el caso general pero de una forma más amplia, en el siguiente sentido: ahora sólo fijamos un momento total, el $\mu_{\theta\theta}$, igual a su valor central, y damos completa libertad a los restantes momentos dentro de los márgenes de error conocidos, al variar γ_1, ρ_1, ρ_4 y ρ_5 (tabla 2). Al no suponer la función de distribución del conjunto del tipo (3) (Ros 1985), adoptábamos, según la muestra, de cuatro a seis momentos totales, fijados de acuerdo con su valor central (los tres momentos de segundo orden y los mejor conocidos de orden superior). Resulta evidente que de proceder entonces como ahora lo hemos hecho, fijando sólo el momento $\mu_{\theta\theta}$, los parámetros a variar serían $\gamma_1, \gamma_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ y ρ_6, pues no dispondríamos de las igualdades (22), y además los intervalos de variación no serían las intersecciones que figuran en la tabla 2, sinó los intervalos originales de la tabla 1, con lo cual el volumen de cálculo se desbordaría sin conseguir con ello mejorar los resultados.

Así pues al comparar los valores de la tabla 3 con los obtenidos por nosotros para las mismas muestras, en el trabajo antes mencionado, observamos que se corresponden bastante bien, aunque los resultados actuales incluyan en cierto modo a los calculados en el pasado, al ser el método de cálculo más general, como se ha dicho.

TABLA 4

MEDIAS ARITMETICAS Y DESVIACIONES TIPICAS, ENTRE PARENTESIS, DEL TANTO POR UNO DE POBLACION II, DE LA DIFERENCIA DE VELOCIDADES DE LOS CENTROIDES (EN km s^{-1}) Y DE LOS MOMENTOS PARCIALES Y NORMALIZADOS DE SEGUNDO ORDEN[a]

Parámetro	Muestra 1		Muestra 2		Muestra 3		Muestra 4	
No. de Interacciones con solución	947		503		47		641	
D	139	(39)	213	(47)	47	(15)	71	(13)
n''	0.04	(0.03)	0.05	(0.03)	0.10	(0.08)	0.07	(0.03)
$S'_{\omega\omega} = S'_{zz}$	0.73	(0.12)	0.60	(0.12)	0.78	(0.10)	0.65	(0.11)
$S''_{\omega\omega} = S''_{zz}$	9.99	(3.12)	9.36	(2.66)	3.42	(0.88)	5.59	(0.81)
$S'_{\theta\theta}$	0.32	(0.18)	0.27	(0.14)	0.63	(0.12)	0.32	(0.12)
$S''_{\theta\theta}$	4.45	(3.11)	2.13	(1.24)	1.66	(0.41)	3.57	(0.85)
No. de estrellas	1059		1175		869		3483	

a. La explicación de las muestras se da en el texto.

Para nuestras cuatro muestras, también se parecen bastante los porcentajes de población II con los calculados al considerar los valores publicados por diversos autores para diferentes grupos de estrellas. Disponemos de los números de Oort (1926) para estrellas distantes a menos de 20 pc, de los deducidos por Kuiper (1948) para estrellas del entorno solar más alejadas y de los debidos a Einasto (1954) para estrellas de la secuencia principal próximas al Sol. Aplicando en cada caso los números más apropiados, observamos una gran concordancia si atendemos a las características de las estrellas que componen cada muestra. Así, para las muestras 1 y 2 consideramos los valores de Oort y de Kuiper y obtenemos para la primera muestra un cinco por ciento de población II, mientras que para la segunda deducimos un diez y un doce por ciento, respectivamente, todo lo cual corrobora nuestros resultados (tablas 3 y 4). Para la tercera muestra de Erickson, la menor de todas, según Oort y Einasto tenemos un veintitres por ciento de población II, de acuerdo con los resultados de la tabla 3. Aplicando estos números de Oort y Kuiper a la cuarta muestra, calculamos un seis y un siete por ciento de población II, respectivamente, por completo de acuerdo con los valores conseguidos según este modelo (tablas 3 y 4).

Todas las muestras consideradas han sido extraídas de los catálogos de Eggen y de Gliese, y en ambos está claramente presente el sesgo cinemático causado por la inclusión de casi todas las estrellas con grandes movimientos transversales, mientras no aparecen aquellas con movimientos pequeños (Hanson 1983). Por tanto, el porcentaje de estrellas de población II de dichos catálogos es artificialmente alto, y en consecuencia, todos los resultados obtenidos a partir de ellos adolecen del mismo defecto. En la tabla 3 figuran las cotas superiores e inferiores de los diversos parámetros. Para centrar más los resultados se ha añadido la tabla 4, donde aparecen los valores más probables para cada parámetro. Así podemos dar unos resultados más concretos a la espera de contar con nuevos datos astrométricos de las estrellas; entonces podremos afinar más al disminuir los errores de los momentos, y podremos concluir una mayor información sobre nuestro entorno.

IV. CONCLUSIONES

a) Hemos simplificado el modelo tridimensional desarrollado en un trabajo anterior (Ros 1985) a partir de la superposición de dos funciones de distribución de Schwarzschild, considerando momentos de orden superior a dos. Presentamos, pues, la muestra total con sus momentos impares no nulos, aunque lo sean todos los relativos a ambos subsistemas.

b) Hemos obtenido un método más sencillo para calcular los porcentajes de población I y II, a partir de los valores de los momentos hasta cuarto orden de una muestra cualquiera, así como las distintas velocidades residuales normalizadas de cada tipo de población y la diferencia entre las velocidades de los centroides de ambos subsistemas.

Deseo terminar expresando mi agradecimiento al Prof. de Orús por sus constantes sugerencias y valiosa ayuda, sin las cuales no hubiese sido posible este estudio.

BIBLIOGRAFIA

Eggen, O.J. 1961, *Royal Obs. Bull.*, No. 51
Eggen, O.J. 1964, *Royal Obs. Bull.*, No. 84.
Einasto, J. 1954, *Tartu Obs. Pub.*, **32**, No. 6.
Erickson, R.R. 1975, *Ap. J.*, **195**, 343.
Gliese, W. 1969, *Catalogue of Nearby Stars*, Astronomisches Rechen-Institut, Heidelberg Veroff. No. 22.
Hanson, R.B. 1983, en *IAU Coll. 76, The Nearby Stars and the Stellar Luminosity Function*, eds. A.B. Davis Philip and A. R. Upgren, p. 51.
Kuiper, G.P. 1948, *A.J.*, **53**, 194.
Oort, J.H. 1926, *Kapteyn Astron. Lab. Groningen Publ.*, No. 40.
Orús, J.J. de 1977, *Apuntes de Dinámica Galáctica*, cátedra de Astronomía, Universidad de Barcelona.
Ros, R.M. 1983, *Superposición de Sistemas Estelares*, Tesis doctoral, Universidad de Barcelona.
Ros, R.M. 1985, *Rev. Mexicana Astron. Astrof.*, **11**, 23.

Rosa Ma. Ros: Departamento de Física de la Atmósfera, Astronomía y Astrofísica, Universidad de Barcelona, Diagonal 645, 08028 Barcelona, España.