Radiación de un Cuerpo Negro
Ley de Emisión de Planck
Una Breve Introducción

José Antonio García Barreto

Investigador Titular B
Instituto de Astronomía
Universidad Nacional Autónoma de México

Apdo. Postal 70-264, México D.F. 04510, México
Tel: (55)5622-39-08, Fax: (55)5616-06-53, http://www.astroscu.unam.mx

Julio 2008.

Radiación de un Cuerpo Negro: Expresión de Planck

El nombre de **cuerpo negro** obedece al hecho de que es un cuerpo que *absorbe perfectamente* toda la radiación que incide sobre él. Sin embargo, fué Kirchhoff quien sostuvo que un cuerpo que *absorbe perfectamente* energía electromagnética es un cuerpo que *también* puede emitir energía electromagnética.

Con ésta definición un **cuerpo negro** es aquel que *absorbe* toda la radiación que le llega a todas las longitudes de onda y la radiación que él emite es sólo función de la tempertaura y de la frecuencia de la onda.

Obviamente **no** existe ningún objeto con tales características, es decir, es una idealización como lo es un *gas ideal*. Sin embargo **sí** existen cuerpos que se aproximan a la definición del cuerpo negro.

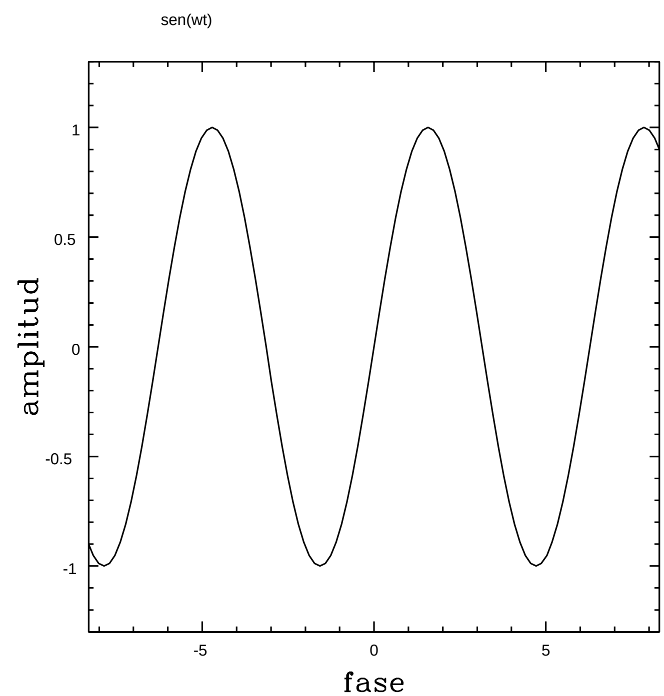

Figure 1: Dibujo esquemático de una onda. La longitud ó distancia entre dos valles consecutivos ó dos crestas consecutivas se conoce como la *longitud de onda*, λ. El número de valles ó crestas que pasa por un determinado punto fijo en un intervalo de tiempo se conoce como la frecuencia de la onda, ν. El producto de la longitud de onda por la frecuencia de la onda es la velocidad de la luz ó velocidad de propagación de la radiación electromagnética, $c = \nu \times \lambda$.

1 Desarrollo utilizando la Física Clásica

Digamos que se tiene un recipiente al cual es imposible que penetre cualquier radiación electromagnética y cuyas paredes internas estan formadas de un material altamente reflejante. Supongamos ahora que dentro de este recipienbte existe un electrón que está oscilando y por lo tanto radía ondas electromagnéticas. Si no existiera el recipiente, estas ondas escaparían y como resultado el electrón tendería a perder energía y eventualmente a no radiar más.

Sin embargo el efecto de las paredes reflejantes del recipiente es que reflejan estas ondas electromagnéticas hasta que en un momento dado impactan sobre el electrón y lo aceleran otra vez para restablecer su capacidad de radiar ó sea que el electrón se encuentra *bañado* ó *rodeado* de su propia radiación.

La emisión y absorción estan balanceadas (Ley de Kirchhoff) de tal forma que el recipiente entero adquiere una temperatura constante y uniforme cuando se ha alcanzado el equilibrio y está en estado estacionario, es decir, que el *tiempo* no es parte de los parámetros y la temperatura no depende de él.

El recipiente esta uniformemente permeado de la densidad de energía de la radiación electromagnética. ¿ Cómo cuantificar esta densidad de energía? Consideérese el caso más sencillo en el cual tenemos una onda que sólo puede viajar en una dirección, digamos la dirección z. Ahora consideremos que las ondas rebotan entre las paredes en $z = 0$ y en $z = L$ (ver Figura 2) de tal manera que se forma una onda estacionaria, es decir, que a la vista de un observador externo la onda aparece fija e inamovible.

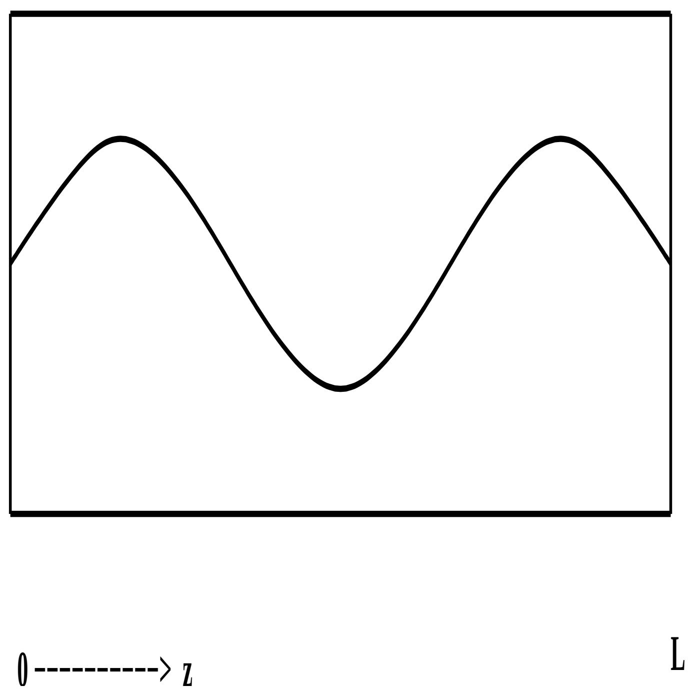

Figure 2: Dibujo esquemático de radiación electromagnética con longitud de onda λ dentro de un recipiente de longitud z igual a L.

Sea el campo *Eléctrico* dado por la siguiente expresión:

$$E_n(z,t) = A_n sen(\frac{n\pi z}{L}) \cdot cos(\omega_n t), \qquad (1)$$

donde

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \cdot c \qquad (2)$$

es la frecuencia en el modo n, es decir, en la dirección z. E_n es el campo eléctrico en el modo n, es decir, en la dirección z.

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \cdot c = \frac{2n\pi}{2L}\lambda_n \nu_n \quad (3)$$

de donde

$$\lambda_n = 2L/n \qquad (4)$$

lo cual nos indica que para tener una onda estacionaria L debe ser un número entero de *medias-longitudes de onda*, es decir

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \quad (5).$$

Para calcular el espectro de radiación debemos de encontrar el número de modos de oscilación, dn, dentro del intervalo de frecuencias dω,

$$dn = \frac{L}{\pi c} d\omega \quad (6).$$

Se sabe, de los estudios de termodinámica, que un sistema en equilibrio térmico tiene una energía, u, igual a $\frac{1}{2}\kappa T$ por cada grado de libertad, ó en este caso, por cada *modo de oscilación*. ($\kappa = 1.38 \times 10^{-16}$ ergs/$\circ$ K.) Propiamente hablando un *modo electromagnético* tiene una energía igual a κT ($\frac{1}{2}\kappa$T en el campo eléctrico y $\frac{1}{2}\kappa$T en el campo magnético). Este método lo aplicaron Rayleigh y Jeans.

La energía promedio de radiación en el intervalo de frecuencia dω sería:

$$\kappa T \frac{L}{\pi c} d\omega \quad (7).$$

Consideremos ahora una cavidad en tres dimensiones (x, y, z), por ejemplo una guía de onda con tapas al frente y al fondo como se aprecia en la Figura 3.

Cada modo de oscilación tinen una frecuencia, ω, determinada por los números n, m, l de tal manera que:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2 \langle \frac{n^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{l^2}{L_z^2} \rangle \quad (8)$$

de donde necesitaremos encontrar el número total de modos de oscilación (ondas estacionarias), es decir, el conjunto de números n, m, l con frecuencias menores que ω. Si graficaramos en dos dimensiones, tendríamos un conjunto de puntos uniformemente espaciados, ver Figura 4.

Las superficies con frecuencia constante, ω, son elipsoides con semiejes $(\frac{L_x\omega}{\pi c}, \frac{L_y\omega}{\pi c}, \frac{L_z\omega}{\pi c})$. Todos los puntos dentro de esa elipsoide tendran una frecuencia menor que ω. Sólo tenemos que dibujar el primer octante de la esfera ya que sólo nos interesan valores positivos de (n, m, l). Si el recipiente tiene muchos modos de oscilación, es decir, que el número de puntos es grande dentro del octante, entonces el número de puntos se aproxima al volúmen del octante:

$$N = \frac{1}{8}\frac{4\pi}{3} \langle \frac{L_x\omega}{\pi c} \rangle \langle \frac{L_y\omega}{\pi c} \rangle \langle \frac{L_z\omega}{\pi c} \rangle \quad (9)$$

$$N = \frac{\omega^3}{6\pi^2 c^3} V \quad (10)$$

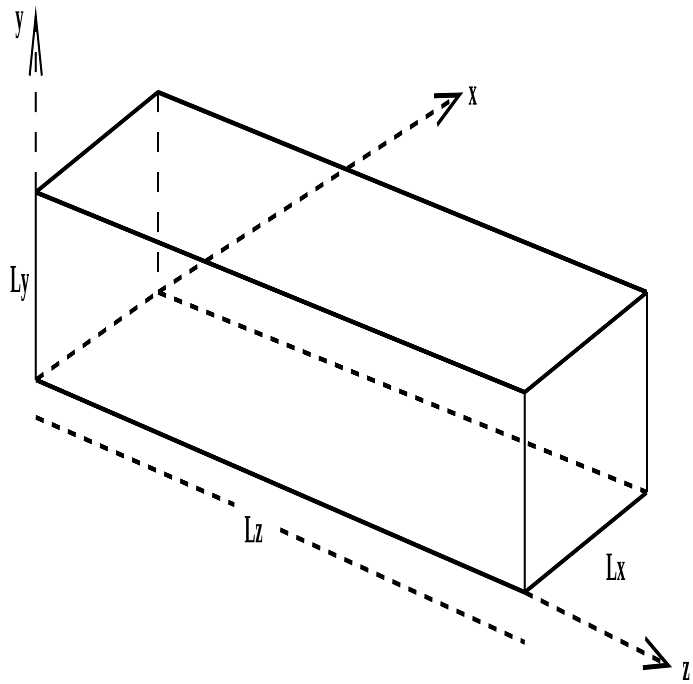

Figure 3: Dibujo esquemático de una cavidad en tres dimensiones (x, y, z) con dimensiones L_x, L_y, y L_z respectivamente.

donde $V = L_x L_y L_z$ que es el volúmen del recipiente.

El número de ondas estacionarias es en realidad el doble que el valor dado por la expresión (10) ya que por cada dirección de propagación hay **dos** polarizaciones posibles de la onda, de tal forma que finalmente se tiene

$$N = \frac{\omega^3}{3\pi^2 c^3} V \quad (11),$$

y el número de ondas estacionarias por unidad de frecuencia sería

$$dN = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V d\omega \quad (12).$$

La densidad de energía de la radiación de un **cuerpo negro** en el intervalo de frecuencias ω y $\omega + d\omega$ es

$$U(\omega) d\omega = \frac{\kappa T \omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega \quad (13).$$

Esta expresión fué originalmente derivada por los físicos Rayleigh y Jeans. La expresión puede escribirse como κT dN/V:

$$U(\omega) = \frac{\kappa T \omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (14).$$

Después se descubrió que ésta ecuación es **sólo válida** para el límite cuando el cociente de energía en los fotones, hν, entre la energía del gas, κT es mucho menor que uno, es decir, $\frac{h\nu}{\kappa T} \ll 1$. Este régimen corresponde a grandes longitudes de onda ó bajas frecuencias de la radiación, es decir, el régimen de las ondas de radio.

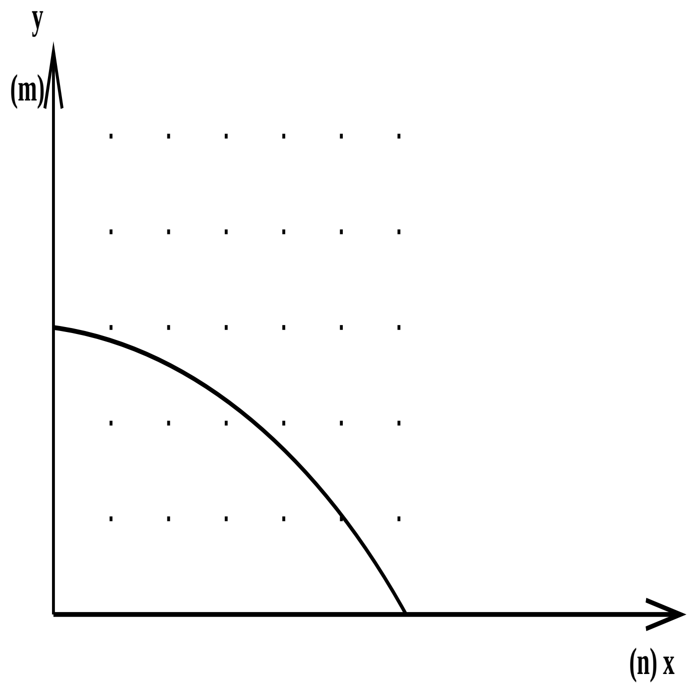

Figure 4: Dibujo esquemático de números m en el eje y contra números n en el eje x. Las superficies con frecuencia constante, ω, son elipsoides.

¿Qué pasa si se integra la ecuación (14) desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$? Se tendría una **energía infinita**. Esto indicaría que nunca se alcanzaría el equilibrio térmico.

Fué el físico Max Planck el primero en notar que en lugar de ser κT la energía por cada modo de oscilación era el cociente

$$\frac{h\nu}{e^{h\nu/\kappa T} - 1} \quad (15)$$

donde $\omega = 2\pi\nu$

Si se substituye la expresión (15) por cada modo de oscilación se tiene

$$U(\omega)d\omega = \frac{h\omega^3}{2\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\omega/2\pi\kappa T} - 1} d\omega \quad (16)$$

Y finalmente se tiene la expresión para la densidad de energía $U(\omega)$:

$$U(\omega) = \frac{4\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/\kappa T} - 1} \quad (17)$$

esta expresión es conocida como la **Ley de Planck**. Si se quiere la energía que fluye ó sale a través de la superficie que encierra al volúmen V, por unidad de tiempo, se tiene

$$B(\nu) = \frac{c}{4\pi} U(\nu) \quad (18),$$

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/\kappa T} - 1} \quad (18)$$

Esta expresión es la *emisión de radiación de un cuerpo negro* ó mejor conocida como la Ley de Planck.

2 Desarrollo utilizando la Física Cuántica

La radiación electromagnética tiene una energía,E, igual a $h\nu$, donde h es la constante de Planck ($h = 6.626 \times 10^{-27}$ ergs s). E se conoce como *un fotón*. Este término lo acuñó Einstein y Planck.

Los fotones son bosones, su potencial químico, (μ), es cero cuando se encuentran en equilibrio térmico a una temperatura T dentro de un volúmen V. Los fotones se pueden describir con la física estadística de Bose - Einstein.

El número promedio de fotones en el estado j es:

$$\bar{n_j} = \frac{1}{e^{E_j/\kappa T} - 1} \quad (19)$$

pero el estado j es un estado en el cual se tiene una frecuencia $\omega_j/2\pi$, donde $\omega_j = \pi c \langle\langle \frac{n}{L_x}\rangle^2 + \langle \frac{m}{L_y}\rangle^2 + \langle \frac{l}{L_z}\rangle^2\rangle$. Debido a que un fotón de frecuencia $\omega/2\pi$ tiene una energía $\hbar\omega_j = \epsilon_j$, entonces (19) nos queda:

$$\bar{n_j} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_j/\kappa T} - 1} \quad (20).$$

Debido a que existen $dN = \frac{\omega^2 V}{\pi^2 c^3} d\omega$ diferentes estados del fotón (ondas estacionarias) con frecuencias entre $\omega/2\pi$ y $\omega + d\omega/2\pi$, entonces se tiene la expresión:

$$d\bar{n} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1} \ (21),$$

y la densidad de energía promedio sería, en un intervalo de frecuencia dω:

$$du = \hbar\omega d\bar{n}/V \quad (22),$$

substituyendo (21) en (22), se tiene:

$$U(\omega) d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1}. \ (23)$$

Esta es la energía por unidad de volúmen. Si se desea la energía que fluye a través de una superficie, S, que encierra al volúmen V, por unidad de tiempo se tiene

$$B(\nu, T) = \frac{c}{4\pi} u(\nu), \quad (24)$$

y finalmente se tiene la expresión para el brillo ó brillantez de un cuerpo negro:

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/\kappa T} - 1}. \ (25)$$

A esta expresión se le conoce como la *radiación de un cuerpo negro* ó **Ley de Planck**.

Bibliografía

Krauss, J. D. 1966 *Radio Astronomy* (New York: McGraw Hill Book Co.)

Bekefi, G. y Barrett, A. H. 1977 *Electromagnetic Vibrations, Waves, and Radiation* (Cambridge: MIT Press)

Morse, P.M. 1978 *Thermal Physics* (Reading, Mass: The Benjamin/Cummings Pub. Co. Inc.)