

Breve Introducción a Termodinámica, El Gas Ideal de Fermi, y Teoría de las Estrellas Enanas Blancas¹

Prof. Kerson Huang
Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, Mass.

Notas para clase de Astrofísica General (Avanzada),
Instituto de Astronomía,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad Universitaria, Apdo. Postal 70-264,
México D.F. 04510, México

2012.

¹Traducción al Español de algunos párrafos (Capítulo 1 sección 1, Capítulo 7 sección 5, Capítulo 9 secciones 1, 3, 5 y 6, Capítulo 11, secciones 1, 2, del libro **Statistical Mechanics**, 1963 autor Kerson Huang, MIT, de la Editorial John Wiley & Sons, Inc. Nueva York, por José Antonio García Barreto, Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México (IA-UNAM), Ciudad Universitaria, México, D.F. 2012.

PREFACIO

Este libro es el resultado de las notas del curso en mecánica estadística que he estado ofreciendo en el Departamento de Física en el Instituto Tecnológico de Massachusetts. Esta dirigido principalmente a estudiantes de posgrado en física.

El propósito del libro es enseñar mecánica estadística como una parte integral de física teórica, una disciplina que tiene como objetivo describir todos los fenómenos naturales sobre la base de una teoría unificadora. Esta teoría, en el presente, es mecánica cuántica.

Temas principales: Leyes de la Termodinámica - Gas Ideal de Fermi - Teoría de las Estrellas Enanas Blancas

Capítulo 1.1 Breve Descripción de las bases de Las Leyes de la Termodinámica

La termodinámica es una teoría fenomenológica de la materia. Como tal, toma sus conceptos directamente de experimentos. La siguiente es una lista de algunos de los conceptos básicos que el físico, a través de la experiencia, ha encontrado conveniente definir e introducir. Seremos extremadamente breves, ya que pensamos que se supone que el lector está familiarizado con estos conceptos.

- a) Un *sistema termodinámico* es cualquier sistema macroscópico.
- b) *Parámetros termodinámicos* son cantidades macroscópicas medibles asociadas con el sistema, tales como la presión P , el volumen V , la temperatura T , y el campo magnético B . Están definidas experimentalmente.
- c) Un *estado termodinámico* está especificado por un conjunto de valores de todos los parámetros necesarios para la descripción del sistema.
- d) *Equilibrio termodinámico* prevalece cuando el estado termodinámico del sistema no cambia con el tiempo.
- e) La *ecuación de estado* es una relación funcional entre los parámetros termodinámicos para un sistema en equilibrio. Si P , V , y T son los parámetros termodinámicos del sistema, la ecuación de estado toma la forma $f(P, V, T) = 0$ la cual reduce el

número de variables independientes del sistema de tres a dos. La función f se supone que está dada como parte de la especificación del sistema. Es usual representar el estado de tal sistema por un punto en el espacio tridimensional P - V - T . La ecuación de estado por lo tanto define una superficie en este espacio, como se muestra en la figura 1.1. Cualquier punto sobre la superficie representa un estado de equilibrio. En termodinámica un estado automáticamente significa un estado en equilibrio a menos que se especifique de otra manera.

- f) Una *transformación termodinámica* es un cambio de estado. Si el estado final es un estado de equilibrio, la transformación puede realizarse solamente a través de cambios en las condiciones externas al sistema. La transformación es *cuasi-estática* si la condición externa cambia en forma tan lenta que en cualquier momento el sistema está aproximadamente en equilibrio. Es *reversible* si la transformación sigue en forma regresiva su historia en tiempo cuando la condición externa sigue, a su vez, en forma regresiva su historia en tiempo. Una transformación reversible es cuasi-estática, pero lo contrario no necesariamente es verdad. Por ejemplo, un gas que libremente se expande en elementos infinitesimales sucesivos de volumen sufre una transformación cuasi-estática, pero no es una transformación reversible.

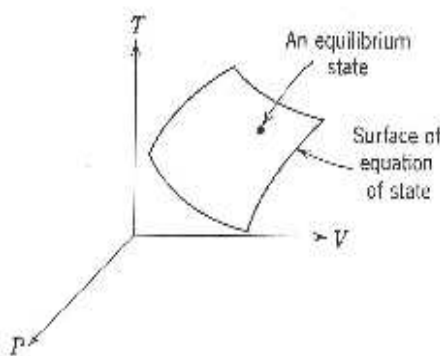


Figure 1: Representación geométrica de la ecuación de estado, en tres dimensiones, presión, temperatura y volumen.

- g) El *diagrama P - V* de un sistema es la proyección de la superficie de la ecuación de estado sobre el plano P - V . Cada punto en el diagrama P - V , por lo tanto, representa un estado de equilibrio. Una transformación reversible es un camino continuo sobre el diagrama P - V . Transformaciones reversibles de tipos específicos

crean caminos con nombres específicos, tales como, *isotermas*, *adiabático*, etc. Una transformación que no es reversible no puede representarse de esta manera.

- h) El concepto de *trabajo* se toma de los conceptos de mecánica. Por ejemplo, para un sistema cuyos parámetros son P , V , y T , el trabajo dW hecho por un sistema en una transformación infinitesimal en la cual el volumen incrementa por un factor de dV está dado por

$$dW = PdV. \quad (1)$$

La generalización a otros casos debe ser obvia.

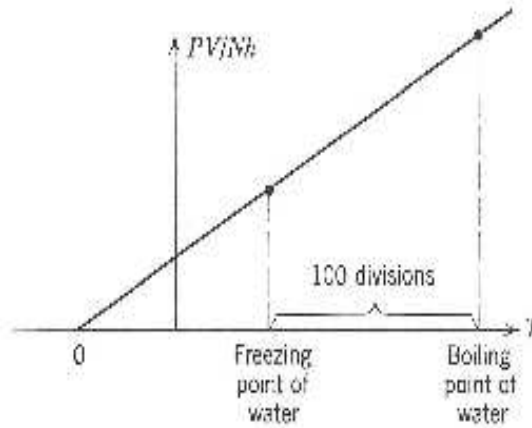


Figure 2: La escala de temperatura de un gas ideal. Temperatura en el eje horizontal y PV/Nk en el eje vertical.

- i) *Calor* es lo que es absorbido por un sistema homogéneo si su temperatura se incrementa mientras no se realiza ningún trabajo. Si ΔQ es una pequeña cantidad del calor absorbido, y ΔT es el pequeño cambio de temperatura al absorber el calor, la *capacidad calorífica* C está definida como:

$$\Delta Q = C\Delta T \quad (2)$$

La capacidad calorífica depende de la naturaleza detallada del sistema y está dada como parte de la especificación del sistema. Es un hecho experimental que, para el

mismo ΔT , ΔQ es diferente para diferentes maneras de calentar al sistema. Correspondientemente, la capacidad calorífica depende de la manera de calentar. C_V y C_P son comunmente consideradas las capacidades caloríficas cuando se calienta teniendo constante el volúmen, y teniendo constante la presión respectivamente. Las capacidades caloríficas por unidad de masa ó por mol de una substancia se denominan *calores específicos*.

- j) Una *fente de calor*, ó simplemente una *fente*, es un sistema tan grande que la ganancia o pérdida de cualquier cantidad finita de calor no cambia su temperatura.
- k) Un sistema esta *térmicamente aislado* si se lleva a cabo ningún intercambio de calor entre el sistema y el mundo externo. Aislamiento térmico se puede adquirir envolviendo al sistema con una *pared adiabática*. Cualquier transformación que el sistema pueda llevar a cabo en aislamiento térmico se dice que se hace adiabáticamente.
- l) Una cantidad termodinámica se dice que es *extensiva* si es proporcional a la cantidad de la substancia en el sistema en consideración y se dice que es *intensiva* si es independiente de la cantidad de substancia en el sistema en consideración. Es un hecho importante empírico que, a primera aproximación, ninguna cantidad termodinámica es ni extensiva ni intensiva.
- m) El gas *ideal* es un sistema importante idealizado. Experimentalmente, todos los gases se comportan en una manera universal cuando ellos están suficientemente diluidos. El gas ideal es una idealización de este comportamiento límite. Los parámetros para un gas ideal son la presión, P , el volúmen V , la temperatura T , y el número de moléculas N . La ecuación de estado está dada por la Ley de Boyle:

$$\frac{PV}{N} = \text{constante} \quad (\text{para una temperatura constante}) \quad (3)$$

El valor de esta constante depende de la escala de temperatura que se utilice.

- n) La ecuación de estado de un gas ideal, de hecho, define una escala de temperatura, la *temperatura del gas ideal*, T :

$$PV = N\kappa T \quad (4)$$

donde $\kappa = 1.38 \times 10^{-16}$ erg/°K, que se denomina la constante de Boltzmann. Su valor está determinado por la convención internacional adoptada para los intervalos de temperatura, es decir, la escala Centígrada. Esta escala tiene un carácter universal porque el gas ideal tiene un carácter universal. El origen $T = 0$ se escogió arbitrariamente. Después veremos que tiene un significado absoluto de acuerdo a la segunda ley de la termodinámica.

Para construir una escala de temperatura de un gas-ideal podemos proceder como sigue. Medir $PV/N\kappa$ de un gas ideal a la temperatura en la cual el agua ebulle y también a la cual el agua se congela. Grafique estos dos puntos y dibuje una línea recta pasando por los dos puntos, como se muestra en la figura 2. Al punto de intersección de la línea con la abscisa (eje horizontal) se escoge como el origen de la escala. Los intervalos de la escala de temperatura se escogen de tal manera que haya 100 divisiones iguales entre el punto de ebullición y el punto de congelamiento del agua. La escala resultante es la escala de Kelvin (°K). Para utilizar esta escala, poner cualquier cosa a la que se desee medir su temperatura en contacto térmico con un gas ideal (ejem. gas helio a una muy baja densidad), medir $PV/N\kappa$ del gas ideal y leer la temperatura directamente de la gráfica de la Fig. 2. Una forma equivalente de la ecuación de estado de un gas ideal es:

$$PV = nRT \quad (5)$$

donde n es el número de moles de un gas y R es la constante de un gas ideal: $R = 8.315$ joule/°K, o $R = 1.986$ cal/°K, ó $R = 0.0821$ litros-atmosfera/°K. Su valor viene del valor de la constante de Boltzmann y el número de Avogadro:

$$\text{Número de Avogadro} = 6.205 \times 10^{23} \text{ átomos por cada mol.}$$

Capítulo 7: Mecánica Estadística Clásica

Sección 7.5 El Gas Ideal Clásico

Para ilustrar el método de cálculo en el ensamble microcanónico consideremos el gas ideal clásico. Este ha sido considerado anteriormente en nuestra discusión de la energía cinética de los gases. En aquella discusión también introducimos el ensamble microcanónico,

pero obtuvimos todas las propiedades termodinámicas del gas ideal via la función de distribución. A manera de ilustración, derivaremos los mismos resultados considerando un sistema aislado que ocupa un volumen V , y tiene una energía E dentro de una incertidumbre $\Delta \ll E$. El Hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N p_i^2 \quad (6)$$

Primero calculamos

$$\sum(E) = \frac{1}{h^{3N}} \int_{H < E} d^3 p_1 \cdots d^3 p_N d^3 q_1 \cdots d^3 q_N \quad (7)$$

donde h es una constante de las dimensiones de momento $\times$ distancia introducida para que $\sum(E)$ no tenga dimensiones. La integración sobre q_i se puede llevar a cabo inmediatamente, dando el factor de V^N . Sea

$$R = \sqrt{2mE} \quad (8)$$

Entonces nos queda

$$\sum(E) = \left(\frac{V}{h^3} \right)^N \Omega_{3N}(R) \quad (9)$$

donde Ω_n es el volumen de una n - *ésima* esfera de radio R :

$$\Omega_n(R) = \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < R^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (10)$$

Claramente

$$\Omega_n(R) = C_n R^n \quad (11)$$

donde C_n es una constante. Para encontrar C_n considérese la identidad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \right)^n = \pi^{n/2} \quad (12)$$

El lado izquierdo de la ecuación 12 se puede volver a expresar de otra manera. Sea $S_n(R) \equiv d\Omega_n(R)/dR$ sea el área superficial de la n - *ésima* esfera de radio R . Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x_1 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n &= \int_0^{+\infty} S_n(R) e^{-R^2} dR \\
&= n C_n \int_0^{+\infty} R^{n-1} e^{-R^2} dR \\
&= \frac{1}{2} n C_n \int_0^{+\infty} t^{(n/2)-1} e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{2} n C_n \left(\frac{n}{2} - 1 \right)! \tag{13}
\end{aligned}$$

Comparando las ecuaciones 12 y 13 nos dá

$$C_n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2 - 1)!} \tag{14}$$

$$\log C_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \log \pi - \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \tag{15}$$

Por lo tanto,

$$\sum(E) = C_{3N} \left[\frac{V}{h^3} (2mE)^{3/2} \right]^N \tag{16}$$

La entropía del gas ideal es

$$S(E, V) = k \left[\log C_{3N} + N \log \frac{V}{h^3} + \frac{3}{2} N \log (2mE) \right] \tag{17}$$

Utilizando la ecuación 15, la expresión para la entropía se reduce a:

$$S(E, V) = N \kappa \log \left[V \left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N} \right)^{3/2} \right] + \frac{3}{2} N \kappa \tag{18}$$

Encontrando E en términos de S y V , y denominando la función resultante $U(S, V)$ (es decir, la energía interna), se obtiene

$$U(S, V) = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{h^2}{m} \right) \frac{N}{V^{2/3}} \exp \left(\frac{2}{3} \frac{S}{N \kappa} - 1 \right) \tag{19}$$

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = \frac{2}{3} \frac{U}{N \kappa} \tag{20}$$

de la cual se puede obtener

$$C_V = \frac{2}{3}N\kappa \quad (21)$$

Finalmente la ecuación de estado es:

$$P = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = \frac{2}{3} \frac{U}{V} = \frac{N\kappa T}{V} \quad (22)$$

Este cálculo muestra que el ensamble microcanónico es burdo para utilizar. Hay poca esperanza de que podamos llevar a cabo directamente una receta del ensamble microcanónico para cualquier otro sistema que no sea el gas ideal. Después en el libro introduciremos el ensamble canónico que dá resultados equivalentes al del ensamble microcanónico pero que es más útil y conveniente para cálculos prácticos.

Capítulo 9: Estadística Cuantomecánica

Sección 9.1 Los Postulados de Mecánica Cuántica Estadística

Todos los sistemas en la naturaleza obedecen la leyes de mecánica cuántica. En mecánica cuántica, un observable de un sistema está asociado con un operador hermítico, el cual opera en el espacio de Hilbert. Un estado de un sistema es un vector $|\Psi\rangle$ en el mismo espacio de Hilbert. Si $|q\rangle$ es un eigenvector de los operadores de posición de todas las partículas en el sistema, entonces $\langle q | \Psi \rangle \equiv \Psi(q)$ es la función de onda del sistema en el estado $|\Psi\rangle$. La función de onda proporciona una descripción completa del estado.

Sección 9.3 Ensambls en Mecánica Cuántica Estadística

Ensamble Microcanónico

La matriz de densidad (de estados) para un ensamble microcanónico en la representación en la cual el Hamiltoniano es diagonal es

$$\rho_{m\ n} = \delta_{m\ n} |b_n|^2 \quad (23)$$

donde

$$|b_n|^2 = \begin{cases} 1 & (E < E_n < E + \Delta) \\ 0 & (\text{cualquier otro valor}) \end{cases} \quad (24)$$

donde $\{E_n\}$ son los eigenvalores del Hamiltoniano. El operador de densidad es

$$\rho = \sum_{E < E_n < E + \Delta} |\Phi_n\rangle \langle \Phi_n| \quad (25)$$

La traza de ρ es igual al número de estados cuya energía cae entre E y $E + \Delta$:

$$\text{Tr } \rho = \sum_n \rho_{nn} \equiv \Gamma(E) \quad (26)$$

Para sistemas macroscópicos, el espectro de energías $\langle E_n \rangle$ casi forma un continuo. Para $\Delta \ll E$, podemos tomar

$$\Gamma(E) = \omega(E) \Delta \quad (27)$$

donde $w(E)$ es la densidad de estados a una cierta energía E . La conexión entre el ensamble microcanónico y la termodinámica está establecido al identificar la entropía como

$$S(E, V) = \kappa \log \Gamma(E) \quad (28)$$

donde κ es la constante de Boltzmann. Esta definición es la misma como la que se tienen en mecánica estadística clásica, excepto que $\Gamma(E)$ deberá ser calculada en mecánica cuántica.

Sección 9.5 Los Gases Ideales El Ensamble Microcanónico

El sistema más simple de N partículas idénticas es aquél compuesto de N miembros no interactuantes. El Hamiltoniano es:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} \quad (29)$$

donde $p_i^2 = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_i$, y $\mathbf{p}_i$ es el operador del momento de la i -ésima partícula. El Hamiltoniano es independiente de la posición de las partículas o cualquier otra coordenada, ejemplo, espín.

En la naturaleza un sistema de N partículas idénticas es cualquiera de dos tipos: Un *sistema Bose* ó un *sistema Fermi*. Un conjunto completo de eigenfunciones para un sistema Bose es la colección de aquellas eigenfunciones de H que son simétricas en el

contexto de un intercambio de cualquier par de coordenadas de las partículas. **Un conjunto completo de eigenfunciones para un sistema de Fermi es la colección de aquéllas eigenfunciones de H que son antisimétricas en el contexto de un intercambio de cualquier par de coordenadas de partículas.** Las partículas formando un sistema Bose son denominados *bosones*, mientras que **las partículas formando un sistema Fermi son denominados *fermiones*.**

Adicionalmente a estos dos tipos de sistemas, definimos para una comparación matemática, lo que se denomina un sistema Boltzmann. Está definido como un sistema de partículas cuyas eigenfunciones son *todas* las eigenfunciones de H , pero la regla para conteo de esas eigenfunciones debe ser “ el conteo correcto de Boltzmann”. El conjunto de eigenfunciones para un sistema Boltzmann incluye aquellas para un sistema Bose y aquellas para un sistema Fermi, y más. No existe ningún sistema conocido de este tipo en la naturaleza. Sin embargo es un modelo útil porque a altas temperaturas el comportamiento termodinámico de ambos, el sistema Bose y el sistema Fermi, se aproximan al sistema Boltzmann.

Para partículas idénticas no interactuantes se tienen tres casos: El gas Ideal Bose, el gas Ideal Fermi, y el gas Ideal Boltzmann. Primero veremos la termodinámica de estos gases ideales en el formalismo de un ensamble microcanónico. Para este propósito es necesario encontrar, para cada uno de estos casos, el número de estados $\Gamma(E)$ del sistema que tengan un eigenvalor de energía que esté entre E y $E + \Delta$. Esto es, debemos aprender como contar.

Para evitar complicaciones innecesarias nos avocamos a discutir solamente partículas sin espín. Cualquier eigenvalor de energía de un sistema ideal es la suma de las energías de partículas-individuales, denominados *niveles*. Estos están dados por:

$$\epsilon_p = \frac{p^2}{2m} \quad (30)$$

donde $p \equiv |\mathbf{p}|$ y $\mathbf{p}$ es el eigenvalor del momento de una partícula individual:

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\mathbf{n} \quad (31)$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector cuyas componentes son 0 ó $\pm$ enteros y L es la raíz cúbica del volúmen del sistema:

$$L \equiv V^{1/3}$$

En el límite, cuando $V \rightarrow \infty$ los posibles valores de $\mathbf{p}$ forman un continuo. Entonces una suma de $\mathbf{p}$ puede algunas veces ser reemplazada por una integración:

$$\sum_p \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d^3p \quad (32)$$

donde $h = 2\pi\hbar$ es la constante de Planck.

Un estado de un sistema ideal puede ser especificado por la especificación de un conjunto de números de ocupación $\{n_p\}$ de tal manera definido que existen un número n_p de partículas teniendo un momento $\mathbf{p}$ en el estado bajo consideración. Obviamente la energía total E y el número total de partículas N del estado están dadas por:

$$\begin{aligned} E &= \sum_p \epsilon_p n_p \\ N &= \sum_p n_p \end{aligned} \quad (33)$$

Para bosones y fermiones sin espín $\langle n_p \rangle$ define unequivocamente un estado del sistema. Los valores permitidos para cualquier n_p son:

$$n_p = \begin{cases} 0, 1, 2, 3, \dots & \text{(para bosones)} \\ 0, 1 & \text{(para fermiones)} \end{cases} \quad (34)$$

Para un gas con estadística de Boltzmann $n_p = 0, 1, 2, \dots$, pero $\{n_p\}$ especifica un número $N! / \prod_p (n_p!)$ de estados del sistema de N partículas. Esto es porque un intercambio del momento de dos partículas en el sistema en general lleva hacia un nuevo estado pero deja $\{n_p\}$ intacto.

La energía total es un número E dado con una incertidumbre pequeña Δ , cuyo valor no es importante. $\Gamma(E)$ se puede encontrar de la siguiente manera. En el límite cuando $V \rightarrow \infty$, los niveles forman un continuo. Dividamos el espectro de niveles (ec. 30) en grupos de niveles teniendo cada uno $g_1, g_2, \dots$ niveles respectivamente. Cada grupo se denomina celda y tiene una energía promedio ϵ_i . El número de ocupación de la i -ésima celda, denotada como n_i es la suma de n_p sobre todos los niveles en la i -ésima celda. Cada g_i se supone que sea muy grande, pero su valor exacto no importa. Sea

$$W \{n_i\} \equiv \text{número de estados del sistema correspondientes al conjunto de} \quad (35) \\ \text{números de ocupación } \{n_i\}$$

Entonces

$$\Gamma(E) = \sum_{\{n_i\}} W \{n_i\} \quad (36)$$

donde la suma se hace sobre todos los conjuntos de enteros $\{n_i\}$ que satisfacen las condiciones

$$E = \sum_i \epsilon_i n_i \quad (37)$$

$$N = \sum_i n_i \quad (38)$$

Para encontrar $W \{n_i\}$ para un gas tipo Bose y un gas tipo Fermi es suficiente el encontrar w_i , es decir, el número de maneras en las cuales n_i partículas pueden ser asignadas a la i ésima celda (la cual contiene g_i niveles). Dado que el intercambiando partículas en diferentes celdas no lleva a un nuevo estado del sistema, se tiene $W \{n_i\} = \prod_j w_j$. Para una gas con estadística de Boltzmann el intercambiar partículas en diferentes celdas sí lleva a un nuevo estado del sistema, y podemos considerar todas juntas las N partículas. Los tres casos se muestran enseguida.

Gas tipo Bose. Cada nivel puede estar ocupado por cualquier número de partículas. Imagínese la i ésima celda con g_i subceldas, cada una con $g_i - 1$ particiones, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdot & | & \cdot & | & \cdot & | & \cdot & | & & | & & | & \cdot \\ \text{subcelda} & 1 & & 2 & & 3 & & & & g_i - i & & g_i \end{array}$$

El número w_i es el número de permutaciones de las n_i partículas mas las $g_i - 1$ particiones que dan lugar a distintos arreglos

$$w_i = \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!}$$

Por lo tanto se tiene

$$W \{n_i\} = \prod_i w_i = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!} \quad (\text{Bose}) \quad (39)$$

Gas tipo Fermi. El número de partículas en cada una de las subceldas g_i de la i ésima celda es ya sea 0 ó 1. Por lo tanto w_i es igual al numero de maneras en las cuales n_i cosas pueden ser escogidas de un total de g_i cosas:

$$w_i = \binom{g_i}{n_i} = \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad (40)$$

Por lo tanto se tiene

$$W \{n_i\} = \prod_i w_i = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad (\text{Fermi}) \quad (41)$$

Gas tipo Boltzmann. Las N partículas son primeramente colocadas en celdas, teniendo n_i partículas la i ésima celda. Existen $N! / \prod_i (n_i!)$ maneras de hacer esto. Dentro de la i ésima celda hay g_i niveles. Entre las n_i partículas en la i ésima celda, la primera puede ocupar estos niveles de g_i maneras. La segunda y todas las subsecuentes también pueden ocupar los niveles de g_i maneras. Por lo tanto, hay $(g_i)^{n_i}$ maneras en las cuales n_i partículas pueden ocupar los g_i niveles. El número total de maneras para obtener $\{n_i\}$ es por lo tanto

$$N! \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

Sin embargo, $W \{n_i\}$ está definido para ser igual a $1/N!$ de la última cantidad:

$$W \{n_i\} = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \quad (\text{Boltzmann}) \quad (42)$$

Esta definición corresponde a la regla del “correcto conteo de Boltzmann” y no corresponde a ninguna propiedad física de las partículas en el sistema. Es solamente una regla que define el modelo matemático.

El hecho de la regla para el conteo de estados sea diferente para los tres tipos de gases da lugar a la terminología *estadística de Bose*, *estadística de Fermi*, y *estadística de Boltzmann* las cuales se refieren a las tres reglas de conteo respectivamente.

Para encontrar la entropía $S = \kappa \log \Gamma(E)$ necesitamos sumar $W \{n_i\}$, sobre todos los números de ocupación de la i ésima celda, $\{n_i\}$, de acuerdo con la expresión en la ec. 35. Esta sería una grandisísima tarea. Para el gas de Boltzmann, esto se realizó en la Sección 7.5. Como bien podríamos adivinar, sin embargo, $\Gamma(E)$ se aproxima muy bien por $W \{\bar{n}_i\}$, donde $\{\bar{n}_i\}$ es el conjunto de número de ocupación que maximiza $W \{\bar{n}_i\}$ de acuerdo a las ec. 37 y ec. 38. Adoptamos esta aproximación y verificamos su exactitud mostrando que las fluctuaciones son pequeñas. Así, la entropía se denota como:

$$S = \kappa \log W \{ \bar{n}_i \} \quad (43)$$

Para encontrar $\{ \bar{n}_i \}$ maximizamos $W \{ \bar{n}_i \}$ variando los números de ocupación de la i ésima celda, n_i , de acuerdo a la ec. 37 y a la ec. 38. Los detalles del cálculo son similares a los dados en la Sección 4.3 y no se reproducirán aquí. Simplemente damos las soluciones:

$$\bar{n}_i = \begin{cases} \frac{g_i}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} \mp 1} & \begin{pmatrix} \text{Bose} \\ \text{Fermi} \end{pmatrix} \\ g_i z e^{-\beta\epsilon_i} & \text{(Boltzmann)} \end{cases} \quad (44)$$

Deducimos de esto que

$$\bar{n}_p = \begin{cases} \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_p} \mp 1} & \begin{pmatrix} \text{Bose} \\ \text{Fermi} \end{pmatrix} \\ z e^{-\beta\epsilon_p} & \text{(Boltzmann)} \end{cases} \quad (45)$$

Los parámetros z y β son los multiplicadores de Lagrange que deben ser determinados según las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \sum_p \epsilon_p \bar{n}_p &= E \\ \sum_p \bar{n}_p &= N \end{aligned} \quad (46)$$

La primera de estas expresiones nos lleva a la identificación de $\beta = 1/\kappa T$, y la segunda identifica a z como una fugacidad ².

Utilizando la aproximación de Sterling y despreciando 1 comparado con g_i tenemos, de las ecs. 42 y 43

²Nota del traductor: la palabra fugacidad se ha escrito como traducción de la palabra en inglés fugacity la cual es la presión corregida utilizada en las ecuaciones termodinámicas de gases reales para darles la misma forma como las ecuaciones de gases ideales. $f_A = \lambda_A \lim_{p \rightarrow 0} (y_A p / \lambda_A)$, donde p es la presión, y y_A es el número de moles de A dividido por el número total de moles en la mezcla. La actividad absoluta, λ_A esta definida por la expresión $\lambda_A = e^{\mu/RT}$ donde μ es el potencial químico de una substancia. La actividad relativa, λ_r esta dada por λ/λ_A donde λ_A es la actividad absoluta de una substancia pura a la misma temperatura y presión de la mezcla.

$$\frac{S}{\kappa} = \log W \{ \bar{n}_i \} = \begin{cases} \sum_i \left[\bar{n}_i \log \left(1 + \frac{g_i}{\bar{n}_i} \right) + g_i \log \left(1 + \frac{\bar{n}_i}{g_i} \right) \right] & \text{(Bose)} \\ \sum_i \left[\bar{n}_i \log \left(\frac{g_i}{\bar{n}_i} - 1 \right) - g_i \log \left(1 - \frac{\bar{n}_i}{g_i} \right) \right] & \text{(Fermi)} \\ \sum_i \bar{n}_i \log \left(\frac{g_i}{\bar{n}_i} \right) & \text{(Boltzmann)} \end{cases} \quad (47)$$

Mas explícitamente,

$$\frac{S}{\kappa} = \begin{cases} \sum_i g_i \left[\frac{\beta \epsilon_i - \log z}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_i} - 1} - \log (1 - z e^{-\beta \epsilon_i}) \right] & \text{(Bose)} \\ \sum_i g_i \left[\frac{\beta \epsilon_i - \log z}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_i} + 1} + \log (1 + z e^{-\beta \epsilon_i}) \right] & \text{(Fermi)} \\ z \sum_i g_i e^{-\beta \epsilon_i} (\beta \epsilon_i - \log z) & \text{(Boltzmann)} \end{cases} \quad (48)$$

La validez de estas ecuaciones depende de la suposición que

$$\frac{\overline{n_i^2} - \bar{n}_i^2}{\bar{n}_i^2} \ll 1 \quad (49)$$

Esto puede facilmente verificarse haciendo un cálculo similar a aquél en la derivación de la ec. 4.54³. De la ecuación 48 todas las demas funciones termodinámicas pueden ser determinadas una vez que z sea determinada en términos de N de la ecuación 46.

Para el gas con estadística de Boltzmann se hará el desglose matemático explícitamente. De las ecuaciones 38 y 44 tenemos:

$$N = z \sum_i g_i e^{-\beta \epsilon_i} = z \sum_p e^{-\beta \epsilon_p} = \frac{zV}{h^3} \int_0^\infty 4\pi p^2 e^{-\beta p^2/2m} dp = \frac{zV}{\lambda^3} \quad (50)$$

³Nota del traductor: La ec. 4.54 es

$$\sqrt{\left\langle \left(\frac{n_i}{N} \right)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{n_i}{N} \right\rangle^2} \approx \frac{\sqrt{\bar{n}_i/N}}{\sqrt{N}}$$

Dado que $\bar{n}_i/N$ es menor que uno, el lado derecho de la ecuación llega a ser extremadamente pequeño si N es el número de moléculas en 1 mole de gas, es decir, $N \approx 10^{23}$. Esto implica que la probabilidad $P \{ n_i \}$ presenta un pico extremadamente angosto en $\{ n_i \}$. El ancho del pico es tal que $P \{ n_i \}$ es esencialmente reducida a cero cuando cualquiera de n_i/N difiere de $\bar{n}_i/N$ por un número del orden de $1/\sqrt{N}$. Denominaremos a las distribuciones dentro del pico distribuciones "esencialmente Maxwell-Boltzmann"

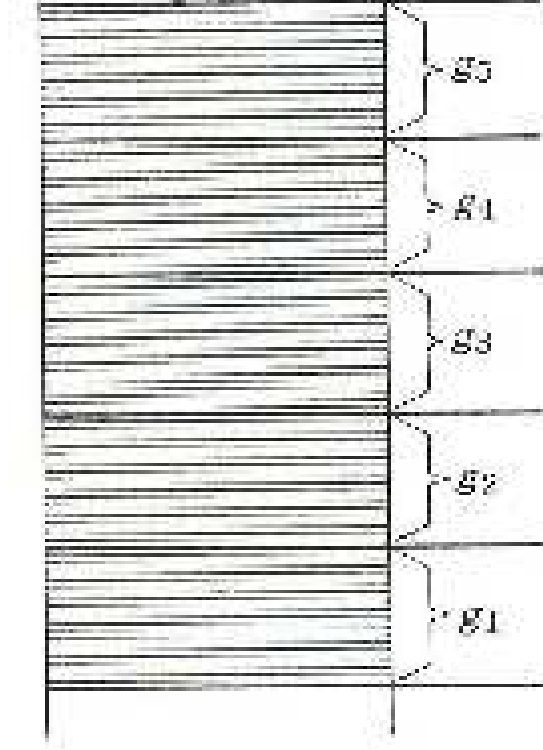


Figure 3: Divisiones del espectro de energía en subceldas de una partícula individual.

donde

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m\kappa T}} \quad (51)$$

A esta cantidad se le denomina la *longitud de onda térmica* porque es del orden de la longitud de onda de de Broglie de una partícula de masa m con una energía κT . Escribiendo $v = V/N$ se obtiene:

$$z = \frac{\lambda^3}{v} \quad (52)$$

La condición $E = \sum n_i \epsilon_i$ requiere que:

$$E = z \sum_i g_i \epsilon_i e^{-\beta \epsilon_i} = z \sum_p \epsilon_p e^{-\beta \epsilon_p} = \frac{zV}{h^3} \int_0^\infty 4\pi p^2 \left(\frac{p^2}{2m}\right) e^{-\beta p^2/2m} dp = \frac{3}{2} N \kappa T \quad (53)$$

Por lo tanto T es la temperatura absoluta. La entropía esta dada, utilizando las ecuaciones 46 y 48:

$$\begin{aligned}
\frac{S}{\kappa} &= z \sum_p e^{-\beta \epsilon_p} (\beta \epsilon_p - \log z) &= \beta E - N \log z \\
&= \frac{3}{2} N - N \log \left[\frac{N}{V} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{m \kappa T} \right)^{3/2} \right]
\end{aligned} \tag{54}$$

Esta es la ecuación Sackur-Tetrode. El hecho de que la constante $h = 2\pi\hbar$ es la constante de Planck se deduce de la ecuación 31, donde $\hbar$ hace su primera aparición. La ecuación de estado se deduce de las funciones $U(S, V)$, la cual es E expresada en términos de S y de V . Se encuentra directamente que $PV = N\kappa T$. Se debe hacer notar que la ecuación 54 no satisface la tercera ley de la termodinámica⁴. Esto no debe causar ningún pánico debido a que un gas de Boltzmann no es un sistema físico. Es solamente un modelo hacia el cual los gases Bose y Fermi convergen a altas temperaturas. Esto muestra, sin embargo, que la tercera ley de la termodinámica no es una consecuencia automática de los principios generales de mecánica cuántica sino que depende de la naturaleza de la densidad de los estados cerca del estado base.

Los detalles matemáticos para los gases de Bose y de Fermi se pudieran desglosar en forma similar. Sin embargo, serán discutidos mas convenientemente en el gran ensamble canónico que se considera a continuación.

Sección 9.6: Los Gases Ideales, El Gran Ensamble Canónico

Las funciones de partición de los gases ideales son:

$$Q_N(V, T) = \sum_{\{n_p\}} g\{n_p\} e^{-\beta E\{n_p\}} \tag{55}$$

donde

$$E\{n_p\} = \sum_p \epsilon_p n_p \tag{56}$$

⁴Nota del traductor: La tercera ley de la termodinámica, de la sección 9.4 dice: A una temperatura absoluta de cero, un sistema está en su estado base. Para un sistema cuyos eigenvalores de energía son discretos, la entropía $S(E, V) = k \log \Gamma(E)$ implica que a una temperatura de cero absoluto $S(E, V) = k \log G$ donde G es el tipo de degeneración del estado base. Si el estado base es único, entonces $S = 0$ a una temperatura de cero absoluto. Si el estado base no es único, pero $G \leq N$, donde N es el número total de moléculas en el sistema, entonces a una temperatura de cero absoluto, $S \leq k \log N$.

y los números de ocupación están sujetos a la condición

$$\sum_p n_p = N \quad (57)$$

Para un gas con estadística de Bose y un gas con estadística de Boltzmann $n_p = 0, 1, 2, \dots$

Para un gas con estadística de Fermi, $n_p = 0, 1$. El número de estados correspondientes a n_p son

$$g\{n_p\} = \begin{cases} 1 & \text{(Bose y Fermi)} \\ \frac{1}{N!} \left(\frac{N!}{\prod_p n_p!} \right) & \text{(Boltzmann)} \end{cases} \quad (58)$$

Para un gas ideal con estadística de Boltzmann se tiene:

$$Q_N = \sum_{\substack{(n_0, n_1, \dots) \\ \sum n_i = N}} \left(\frac{e^{-\beta n_0 \epsilon_0}}{n_0!} \frac{e^{-\beta n_1 \epsilon_1}}{n_1!} \dots \right) = \frac{1}{N!} (e^{-\beta \epsilon_0} + e^{-\beta \epsilon_1} + \dots)^N$$

La igualdad es el teorema multinomial. En el límite cuando $V \rightarrow \infty$ se puede escribir

$$\sum_p e^{-\beta \epsilon_p} = \frac{V}{h^3} \int_0^\infty 4\pi p^2 e^{-(\beta p^2)/(2m)} dp = V \left(\frac{m\kappa T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \quad (59)$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{N} \log Q_N = \log \left[\frac{V}{N} \left(\frac{m\kappa T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \right] \quad (60)$$

de la cual se deduce la ecuación Sackur-Tetrode para la entropía y la ecuación de estado $PV = N\kappa T$.

Para los gases con estadística de Bose y de Fermi, la función de partición no se puede evaluar fácilmente debido a la condición expresada en la ecuación 57. En vez de la función de partición, se considerará la gran función de partición

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(z, V, T) &= \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{\{n_p\} \\ \sum n_p = N}} z^N e^{-\beta \sum \epsilon_p n_p} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{\{n_p\} \\ \sum n_p = N}} \prod_p (ze^{-\beta \epsilon_p})^{n_p} \end{aligned} \quad (61)$$

Se debe notar que la doble sumatoria es equivalente a sumar cada n_p independientemente. Los resultados son:

$$\mathcal{L}(z, V, T) = \begin{cases} \prod_p \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_p}} & \text{(Bose)} \\ \prod_p (1 + ze^{-\beta\epsilon_p}) & \text{(Fermi)} \end{cases} \quad (62)$$

Las ecuaciones de estado son:

$$\frac{PV}{\kappa T} = \log \mathcal{L}(z, V, T) = \begin{cases} - \sum_p \log(1 - ze^{-\beta\epsilon_p}) & \text{(Bose)} \\ \sum_p \log(1 + ze^{-\beta\epsilon_p}) & \text{(Fermi)} \end{cases} \quad (63)$$

de las cuales z debe eliminarse con la ayuda de las ecuaciones

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \log \mathcal{L}(z, V, T) = \begin{cases} \sum_p \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_p}} & \text{(Bose)} \\ \sum_p \frac{ze^{-\beta\epsilon_p}}{1 + ze^{-\beta\epsilon_p}} & \text{(Fermi)} \end{cases} \quad (64)$$

Los números promedio de ocupación $\langle n_p \rangle$ estan dados por:

$$\langle n_p \rangle = \frac{ze^{-\beta\epsilon_p}}{1 \mp ze^{-\beta\epsilon_p}} \begin{pmatrix} Bose \\ Fermi \end{pmatrix} \quad (65)$$

los cuales son los mismos que los expresados en la ecuación 45. Las ecuaciones 64 no expresan otra cosa que el enunciado:

$$N = \sum_p \langle n_p \rangle \quad (66)$$

Los resultados obtenidos hasta aquí son completamente equivalentes a aquellos en el ensamble microcanónico (tal como debería ser).

Ahora, dejemos que en el límite $V \rightarrow \infty$, y reemplazemos las sumatorias de $\mathbf{p}$ por integrales de $\mathbf{p}$ en la manera indicada en la ecuación 32 siempre que sea posible. Tal reemplazo es claramente válido si el sumando en cuestión es finito para todos $\mathbf{p}$. En las ecuaciones 63 y 64 el término de fugacidad, z es una cantidad no-negativa para ambos gases Bose y Fermi. Si por el contrario, z fuese negativa, entonces la ecuación 64 no podría satisfacerse para números positivos N . Vemos inmediatamente que para el gas ideal de

Fermi es permisible reemplazar las sumas en las ecuaciones 63 y 64 por integrales sobre $\mathbf{p}$. Entonces se obtienen las siguientes ecuaciones de estado.

Gas Ideal de Fermi

$$\begin{cases} \frac{P}{\kappa T} &= \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 \log(1 + ze^{-\beta p^2/2m}) dp \\ \frac{1}{v} &= \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 \frac{1}{z^{-1}e^{\beta p^2/2m} + 1} dp \end{cases} \quad (67)$$

donde $v = V/N$. Se puede verificar de una manera directa que la ecuación 67 también se puede escribir de la forma

$$\begin{cases} \frac{P}{\kappa T} &= \frac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \\ \frac{1}{v} &= \frac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z) \end{cases} \quad (68)$$

donde $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/m\kappa T}$ y

$$f_{5/2}(z) \equiv \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^2 \log(1 + ze^{-x^2}) dx = \sum_{l=1}^\infty \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{5/2}} \quad (69)$$

$$f_{3/2}(z) \equiv z \frac{\partial}{\partial z} f_{5/2} = \sum_{l=1}^\infty \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{3/2}} \quad (70)$$

Para un gas idel Bose los summandos en las ecuaciones 63 y 64 divergen cuando $z \rightarrow 1$ porque el término individual correspondiente a $\mathbf{p} = 0$ diverge. Por lo tanto, el término individual $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ puede ser tan importante como la suma entera. Dividimos los términos en las ecuaciones 63 y 64 que corresponden a $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ y los reemplazamos las sumas restantes por integrales. Así obtenemos las ecuaciones de estado.

Gas Ideal de Bose

$$\begin{cases} \frac{P}{\kappa T} &= -\frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 \log[1 - ze^{-\beta p^2/2m}] dp - \frac{1}{V} \log(1 - z) \\ \frac{1}{v} &= \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 \frac{1}{z^{-1}e^{\beta p^2/2m} - 1} dp + \frac{1}{V} \frac{z}{1 - z} \end{cases} \quad (71)$$

donde $v = V/N$. Se puede verificar en forma directa que la expresión 71 también se puede expresar como:

$$\begin{cases} \frac{P}{\kappa T} &= -\frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{1}{V} \log(1 - z) \\ \frac{1}{v} &= \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1 - z} \end{cases} \quad (72)$$

donde $\lambda = \sqrt{(2\pi\hbar^2)/(m\kappa T)}$, y

$$g_{5/2}(z) \equiv \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^2 \log(1 - ze^{-x^2}) dx = \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^{5/2}} \quad (73)$$

$$g_{3/2}(z) \equiv z \frac{\partial}{\partial z} g_{5/2} = \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^{3/2}} \quad (74)$$

Tal y como se implica en la ecuación 65, la cantidad $z/(1 - z)$ es el número promedio de ocupación $\langle n_o \rangle$ para el nivel con $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ de una partícula sencilla:

$$\frac{z}{1 - z} = \langle n_o \rangle \quad (75)$$

Este término contribuye significativamente a la expresión 72 siempre y cuando $\langle n_o \rangle/V$ es un número finito, por ejemplo, si una fracción de todas las partículas en el sistema ocupan el nivel individual con $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ (se verá en la Sección 12.3 que tal circunstancia da lugar al fenómeno de la condensación Bose-Einstein⁵).

La energía interna para ambos gases ideales Bose y Fermi puede deducirse de la fórmula

$$U(z, V, T) = \frac{1}{\mathcal{L}} \sum_{N=0}^\infty z^N \sum_{\substack{\{n_p\} \\ \sum n_p = N}} \left[e^{-\beta \sum \epsilon_p n_p} \sum_p \epsilon_p n_p \right] = \frac{-\partial}{\partial \beta} [\log \mathcal{L}(z, V, T)] \quad (76)$$

Dado que $\log \mathcal{L} = PV/N\kappa T$, se obtiene de las ecuaciones 68 y 72 los resultados siguientes:

$$\frac{1}{V} U(z, V, T) = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\kappa T}{\lambda^3} f_{5/2}(z) & \text{(Fermi)} \\ \frac{3}{2} \frac{\kappa T}{\lambda^3} g_{5/2}(z) & \text{(Bose)} \end{cases} \quad (77)$$

Para expresar U en términos de N , V , y T debemos eliminar z . El resultado sería una función muy complicada. Sin embargo, una comparación entre las ecuaciones 68, 72, y 77 nos muestra que U está directamente relacionada con la presión a través de

$$U = \frac{3}{2} PV \quad \text{(Bose y Fermi)} \quad (78)$$

⁵Nota del traductor: El capítulo 12 habla sobre el Gas Ideal de Bose, y en particular la sección 12.3 habla sobre *La Condensación Bose-Einstein*.

Esta expresión también es válida para el gas ideal tipo Boltzmann⁶.

Capítulo 11: El Gas Ideal de Fermi

11.1 Ecuación de Estado de un Gas Ideal de Fermi

La ecuación de estado de un gas ideal de Fermi sin espín se obtiene eliminando z de las ecuaciones 67. Primero estudiaremos el comportamiento de z tal y como esta determinado por la segunda ecuación en 67, es decir,

$$\frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z) \quad (79)$$

donde $v = V/N$ y

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2}{z^{-1}e^{x^2} + 1} dx \quad (80)$$

Se puede facilmente verificar que es $f_{3/2}(z)$ es una función monotónicamente creciente de z . Para valores pequeños de z tenemos la serie de potencias

$$f_{3/2}(z) = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} - \frac{z^4}{4^{3/2}} + \dots \quad (81)$$

Para valores grandes de z se puede obtener una expansión asintótica a través de un método introducido por Sommerfeld. Sea $\kappa T\nu$ el potencial químico el cual esta definido por

$$\kappa T\nu = \left(\frac{\partial A}{\partial N} \right)_{V,T} \quad (82)$$

y está relacionada con z como sigue

$$\nu = \log z \quad (83)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f_{3/2}(z) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^{x^2-\nu} + 1} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{y}}{e^{y-\nu} + 1} dy = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{y^{3/2} e^{y-\nu}}{(e^{y-\nu} + 1)^2} dy \end{aligned} \quad (84)$$

⁶Nota del traductor: En la expresión para U se ha supuesto que $V^{-1} \log(1-z)$ en la ecuación 72 se puede despreciar. Esto se justifica en la Sección 12.3 donde se trata la condensación Bose-Einstein.

El ultimo paso se obtiene a través de una integración por partes. Expandiendo $y^{3/2}$ en una serie de Taylor alrededor de ν , se obtiene

$$\begin{aligned} f_{3/2} &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{y-\nu}}{(e^{y-\nu} + 1)^2} dy [\nu^{3/2} + \frac{3}{2}\nu^{1/2}(y-\nu) + \frac{3}{8}\nu^{-1/2}(y-\nu)^2 + \dots] \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_{-\nu}^\infty \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} dt (\nu^{3/2} + \frac{3}{2}\nu^{1/2}t + \frac{3}{8}\nu^{-1/2}t^2 + \dots) \end{aligned}$$

Ahora escribimos

$$\int_{-\nu}^\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{-\nu}$$

La segunda integral es del orden $e^{-\nu}$. Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} f_{3/2} &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} dt (\nu^{3/2} + \frac{3}{2}\nu^{1/2}t + \frac{3}{8}\nu^{-1/2}t^2 + \dots) + O(e^{-\nu}) \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (I_0\nu^{3/2} + \frac{3}{2}I_1\nu^{1/2} + \frac{3}{8}I_2\nu^{-1/2} + \dots) + O(e^{-\nu}) \end{aligned} \quad (85)$$

donde

$$I_n \equiv \int_{-\infty}^\infty \frac{t^n e^t}{(e^t + 1)^2} dt \quad (86)$$

Sin tomar en cuenta el factor de t^n , el integrando es una función par de t . Por lo tanto, $I_n = 0$ para todos los valores impares de n . Para valores pares de n , se tiene

$$I_0 = -2 \int_0^\infty \frac{d}{dt} \frac{1}{(e^t + 1)} dt = 1 \quad (87)$$

y para valores pares mayores que cero, $n > 0$,

$$\begin{aligned} I_n &= -2 \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(e^{\lambda t} + 1)} dt \right]_{\lambda=1} = 2n \int_0^\infty \frac{u^{n-1}}{e^u + 1} du \\ &= (n-1)!(2n)(1-2^{1-n})\zeta(n) \end{aligned} \quad (88)$$

donde $\zeta(n)$ es la función zeta de Riemann de n y es una función que se encuentra en tablas. Algunos valores de $\zeta(n)$ son:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

Por lo tanto,

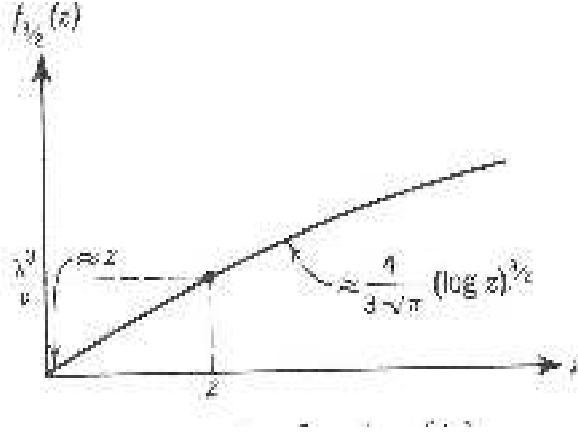


Figure 4: La función $f_{3/2}$ como función de z . Nótese que la función $f_{3/2}$ aumenta lentamente en función de z .

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[(\log z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-1/2} + \dots \right] + O(z^{-1}) \quad (89)$$

Una gráfica de $f_{3/2}(z)$ se muestra en la figura 5. Para cualquier valor positivo de λ^3/v , el valor de z determinado por la ecuación 79, se puede leer directamente de la gráfica. Se observa que z aumenta monótonicamente al aumentar λ^3/v . Para valores fijos de v , z aumenta monótonicamente al disminuir la temperatura.

Altas Temperaturas y Bajas Densidades ($\lambda^3/v \ll 1$)

Para $\lambda^3/v \ll 1$ la separación promedio interpartícula $v^{1/3}$ es mucho mas grande que la longitud de onda térmica λ . Esperaríamos efectos cuánticos despreciables. De las ecuaciones 79 y 81 se obtiene

$$\frac{\lambda^3}{v} = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \dots$$

la cual se puede resolver para darnos

$$z = \frac{\lambda^3}{v} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^2 + \dots \quad (90)$$

Por lo tanto z se reduce a la expresión para el gas con estadística de Boltzmann (ecuación 52) cuando $\lambda^3 \rightarrow 0$ ($T \rightarrow \infty$). El número promedio de ocupación (ecuación 65) se reduce a la forma Maxwell-Boltzmann

$$\langle n_p \rangle \approx \frac{\lambda^3}{v} e^{-\beta \epsilon_p} \quad (91)$$

La ecuación de estado (ecuación 67) esta dada por la siguiente expresión

$$\frac{Pv}{\kappa T} = \frac{v}{\lambda^3} \left(z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + \dots \right) = 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{v} + \dots \quad (92)$$

Esta es la forma de la expansión virial. Las correcciones a la ley clásica del gas ideal, sin embargo, no son debidas a las interacciones moleculares, sino a los efectos cuánticos. El segundo coeficiente virial en este caso es

$$\frac{\lambda^3}{2^{5/2}} = \frac{1}{2^{5/2}} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m\kappa T} \right)^{3/2} \quad (93)$$

Todas las demas funciones termodinámicas se reducen a aquellas para el gas ideal clásico mas pequeñas correcciones.

Bajas Temperaturas y Altas densidades $\lambda^3/v \gg 1$

Para valores $\lambda^3/v \gg 1$ la longitud de onda promedio de de Broglie de una partícula es mucho mayor que la separación promedio interpartícula. Esto hace que los efectos cuánticos, en particular los efectos del principio de exclusión de Pauli, sean muy importantes.

En la cercanía del cero absoluto, se tiene, de las ecuaciones 79 y 89,

$$\frac{1}{v} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m\kappa T} \right)^{3/2} \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \quad (94)$$

y

$$z \approx e^{\beta\epsilon_F} \quad (95)$$

donde

$$\epsilon_F \equiv \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{v} \right)^{2/3} \quad (96)$$

a la cual se le denomina **la energía de Fermi**. Para estudiar su significado físico, examinemos $\langle n_p \rangle$ cerca del cero absoluto:

$$\langle n_p \rangle \approx \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \epsilon_F)} + 1} \quad (97)$$

Si $\epsilon_p < \epsilon_F$, entonces la exponencial en el denominador tiende a cero cuando $T \rightarrow 0$ (es decir cuando $\beta \rightarrow \infty$) y por lo tanto, $\langle n_p \rangle = 1$. Para otros valores, $\langle n_p \rangle = 0$. Así, se tiene

$$\langle n_p \rangle_{T=0} = \begin{cases} 1 & (\epsilon_p < \epsilon_F) \\ 0 & (\epsilon_p > \epsilon_F) \end{cases} \quad (98)$$

El significado físico de esta fórmula es claro. Bajo el principio de exclusión de Pauli, no pueden estar en el mismo nivel de energía dos partículas. Por lo tanto, en el nivel base del sistema, las partículas ocupan los mínimos niveles de energía posibles y los llenan hasta un nivel finito de energía, la energía de Fermi, ϵ_F . En el espacio de momento las partículas llenan una esfera de radio $\mathbf{p}_F$. Esta esfera es algunas veces denominada la esfera de Fermi. Así, ϵ_F es simplemente el nivel de energía de una partícula sencilla, debajo del cual existen exactamente N estados de energía. Con esta interpretación, calculemos ϵ_F independientemente. La condición que determina ϵ_F es

$$\sum_p \langle n_p \rangle_{T=0} = N$$

la cual, por medio de la ecuación 98, es equivalente a escribir

$$\frac{V}{h^3} \int_{\epsilon_p < \epsilon_F} d^3p = N$$

Escribiendo $\epsilon_F = p_F^2/2m$, encontramos que p_F debe satisfacer la condición siguiente

$$\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3 = N \quad (99)$$

la cual nos lleva a la ecuación 96.

El último cálculo también expresa como la energía de Fermi, ϵ_F debe ser modificada si las partículas tienen espín. Si el espín de una partícula es $\hbar s$, entonces para un momento dado, $\mathbf{p}$ existen $2s + 1$ estados de energía de una partícula individual, todos ellos teniendo la misma energía ϵ_p . Por lo tanto, la expresión 99 se debe modificar para escribirse

$$(2s + 1) \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3 = N \quad (100)$$

la cual nos lleva a la **expresión para la energía de Fermi, para partículas con espín**

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{2s + 1} \frac{1}{v} \right)^{2/3} \quad (101)$$

También podríamos interpretar la expresión 100 de la siguiente manera. Una partícula de espín $\hbar s$ puede tener $2s + 1$ diferentes orientaciones de su espín. Las partículas que tienen diferentes orientaciones de su espín pueden tener cualquier simetría relativa al intercambio de sus coordenadas de *posición*. Por lo tanto se podría considerar un sistema de N fermiones cada uno con espín $\hbar s$ hecho de $2s + 1$ gases independientes de Fermi cada uno teniendo $N/(2s + 1)$ fermiones sin espín, y la expresión 100 se obtiene inmediatamente.

Para obtener las funciones termodinámicas para bajas temperaturas y altas densidades, primero debemos obtener la expansión del potencial químico de las expresiones 79 y 89:

$$\kappa T \nu = \kappa T \log z = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{\kappa T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (102)$$

El parámetro de expansión es $\kappa T/\epsilon_F$. Si definimos la **Temperatura de Fermi T_F** (la cual es una función de la densidad) como

$$\kappa T_F \equiv \epsilon_F \quad (103)$$

entonces a bajas temperaturas y altas densidades significa que $T \ll T_F$. En este dominio se dice que el gas está **degenerado** *porque las partículas tienden a irse a los niveles de energía mas bajos posibles*. Por esta razón a T_F también se le denomina **la temperatura de degeneración**.

El número de ocupación promedio es:

$$\langle n_p \rangle = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_p - \nu} + 1} \quad (104)$$

donde ν esta dada por la expresión 102. Dado que $\epsilon_p = p^2/2m$, n_p depende de $\mathbf{p}$ solamente a través de p^2 . Un dibujo de n_p está mostrado en la Fig. 5.

La energía interna es:

$$U = \sum_p \epsilon_p \langle n_p \rangle = \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{2m} \int_0^\infty p^4 \langle n_p \rangle dp$$

Despues de una integración por partes, se obtiene

$$U = \frac{V}{4\pi^2 m \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^5}{5} \left(-\frac{\partial}{\partial p} \langle n_p \rangle \right) dp = \frac{\beta V}{20\pi^2 m^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^6 e^{\beta \epsilon_p - \nu}}{(e^{\beta \epsilon_p - \nu} + 1)^2} \quad (105)$$

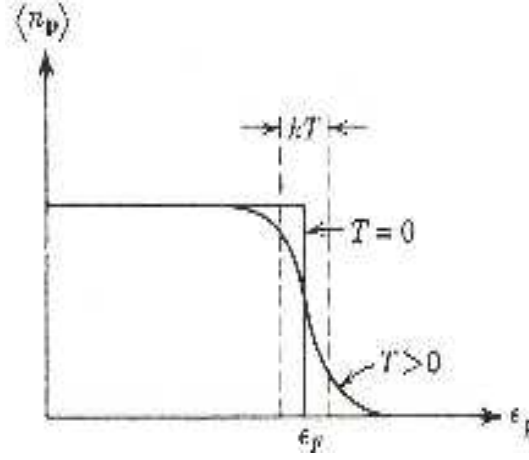


Figure 5: Número de ocupación promedio en un gas ideal de Fermi.

Es aparente de la Fig. 5 que $\partial\langle n_p \rangle / \partial p$ tiene un máximo muy pronunciado en $p = p_F$. De hecho, en el cero absoluto, es una función- δ en $p = p_F$. Por lo tanto la integral en la expresión 105 se puede evaluar expandiendo el factor p^6 alrededor de $p = p_F$. El procedimiento es similar al utilizado al obtener la expresión 89. Después de insertar ν de la expresión 102 se obtiene la expansión asintótica

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{\kappa T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (106)$$

El primer término es el estado de energía base del gas de Fermi dada una densidad, como se puede verificar mostrando lo siguiente:

$$\sum_{|\mathbf{p}| < \mathbf{p}_F} \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{5} N \epsilon_F \quad (107)$$

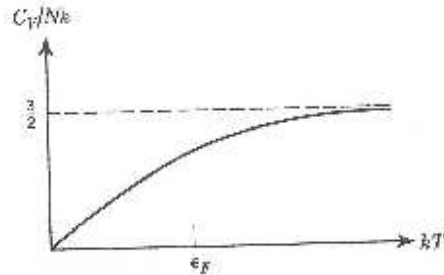


Figure 6: Calor específico de un gas ideal de Fermi.

El calor específico, para un volumen constante, puede ser inmediatamente estimado de la expresión 106, es decir:

$$\frac{C_V}{N\kappa} \approx \frac{\pi^2}{2} \frac{\kappa T}{\epsilon_F} \quad (108)$$

Desaparece linealmente cuando $T \rightarrow 0$, comprobando así la tercera ley de la termodinámica. Sabemos que $C_V/N\kappa$ se aproxima a $\frac{3}{2}$ cuando $T \rightarrow \infty$. Por lo tanto un dibujo cualitativo de $C_V/N\kappa$ se puede hacer, como el mostrado en la Figura 6. El hecho de que sea proporcional a T a estas bajas temperaturas se puede entender como sigue. A una temperatura $T > 0$, $\langle n_p \rangle$ difiere de los valores para cuando $T = 0$ porque un cierto número de partículas son excitadas a niveles de energía $\epsilon_p > \epsilon_F$. Hablando en forma somera, las partículas con energías del orden de κT más bajas que ϵ_F son excitadas a energías del orden de κT más altas que ϵ_F (ver Fig. 5). El número de partículas excitadas es por lo tanto del orden de $(\kappa T/\epsilon_F)N$. Por lo tanto la energía total de excitación arriba del nivel base es $\Delta U \approx (\kappa T/\epsilon_F)N\kappa T$, de donde se deduce que $C_V \approx (\kappa T/\epsilon_F)N\kappa$.

De las expresiones 78 y 106 se obtiene la ecuación de estado:

$$P = \frac{2}{3} \frac{U}{V} = \frac{2}{5} \frac{\epsilon_F}{v} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{\kappa T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (109)$$

Esto muestra que aún a una temperatura de cero absoluto es necesario mantener al gas ideal de Fermi con paredes externas fijas porque la presión no desaparece (no es cero). Esto es una manifestación del Principio de Exclusión de Pauli, el cual permite solamente a una sola partícula tener momento cero. Todas las demás partículas deben tener un momento finito y dan lugar a la presión diferente de cero.

Para obtener la función termodinámica para valores arbitrarios de λ^3/v se deben utilizar métodos numéricos para calcular las funciones $f_{3/2}(z)$ y $f_{5/2}(z)$.

Sección 11.2 Teoría de las Estrellas Enanas Blancas

Es una regla empírica que el brillo de una estrella es proporcional a su color (por ejemplo, la longitud de onda de la radiación emitida). La constante de proporcionalidad es vagamente la misma para todas las estrellas. Así si se hace un dibujo del brillo, en el eje vertical, contra el color, en el eje horizontal, se obtiene lo que se conoce como el diagrama Hertzsprung-Russell, en el cual la mayoría de las estrellas caen dentro de una franja

lineal denominada la secuencia principal, como se muestra en la Figura 7. Existen, sin embargo, estrellas que son la excepción a esta regla. Existen las denominadas estrellas gigantes rojas, que son estrellas con grandes diámetros con un gran brillo a pesar de su color rojo, y también existen las estrellas enanas blancas, que son estrellas con diámetros muy pequeños y que tienen un brillo muy pequeño a pesar de su color blanco. **Las estrellas enanas blancas son un tópico interesante para nuestro estudio, porque a primera aproximación están formadas de un gas degenerado de Fermi.**

Un estudio detallado de la constitución de las estrellas enanas blancas nos lleva a la conclusión de que su brillo es muy bajo debido a que la oferta de hidrógeno atómico, el cual es la fuente principal de energía de las estrellas, ya se ha utilizado y consumido y por lo tanto están principalmente compuestas de gas helio. El poco brillo que tienen se obtiene de la energía de gravitación obtenida a través de una lenta contracción de la estrella. Probablemente estas estrellas han alcanzado la etapa final de la evolución estelar. Una de las estrellas más cercanas al sistema solar, la compañera de Sirio, a una distancia de sólo 8 años luz de nosotros⁷, es una enana blanca. El tener un brillo tan débil hace que no se pueda detectar a simple vista y su existencia fue predicha por los cálculos de Bessel, quien trató de explicar por qué Sirio aparentemente se mueve alrededor de un punto en el espacio vacío.

Un modelo idealizado de una estrella enana blanca se puede construir a partir de datos típicos de tal estrella:

Contenido: principalmente helio

Densidad $\approx 10^7$ gramos por centímetro cúbico $\approx 10^7 \rho_{\odot}$

Masa $\approx 10^{33}$ gramos $\approx M_{\odot}$

Temperatura Central $\approx 10^7$ °K $\approx T_{\odot}$

donde el subíndice $\odot$ denota cantidades con referencia a nuestro sol. Así, una estrella enana blanca es una masa de helio a una extremadamente alta temperatura bajo una gran compresión. La temperatura de diez millones de grados Kelvin corresponde a una energía térmica de 1000 eV. Así, se espera que todos los átomos de helio estén comple-

⁷Nota del traductor: Un año luz de distancia, es la distancia que recorre la radiación electro-magnética (luz) en el intervalo de tiempo de un año. En unidades de longitud (en metros), un año luz, 1 a.l. $\sim 9.2935 \times 10^{15}$ m, es decir, 9,293,566,198,000,000 m (nueve mil doscientos noventa y tres billones quinientos sesenta y seis mil millones ciento noventa y ocho millones de metros).

tamente ionizados⁸, y la estrella se puede considerar como un gas compuesto de núcleos (cargados positivamente) y electrones (cargados negativamente). Se puede considerar el gas de electrones como un gas ideal de Fermi, con una densidad aproximadamente de 10^{39} electrones por cada centímetro cúbico. Esto corresponde a una energía de Fermi de

$$\epsilon_F \approx \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{v^{2/3}} \approx 20 \text{ MeV}$$

y una temperatura de Fermi de

$$T_F \approx 10^{11} \text{ }^\circ K$$

Debido a que la temperatura de Fermi es mucho mayor a la temperatura de la estrella, **el gas de electrones se puede considerar como un gas de Fermi extremadamente degenerado** el cual no se comporta diferente de un gas de electrones a una temperatura de cero absoluto. De hecho se considera el gas de electrones como un gas ideal de Fermi en su estado base. La enorme presión (a una temperatura de cero absoluto) ejercida por el gas de electrones se contrarresta por la atracción gravitacional que mantiene unida a la estrella. La atracción gravitacional es casi completamente debida a los núcleos de helio en el interior de la estrella. La presión debida a los movimientos cinéticos de los núcleos de helio, y cualquier radiación que pudiera estar presente, no serán considerados (serán despreciados).

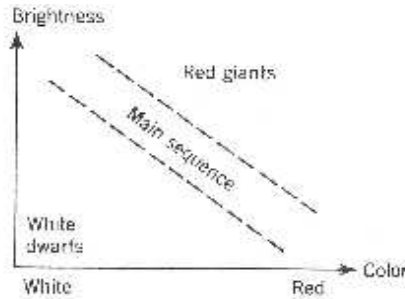


Figure 7: Diagrama Hertzsprung - Russell, donde se observa la banda donde se encuentran las estrellas cuya fuente de energía son las reacciones termonucleares y se le denomina la secuencia principal. Arriba a la derecha se encuentran las gigantes rojas y abajo a la izquierda se encuentran las enanas blancas.

⁸Nota del traductor: el término ionización se refiere a quitarle los electrones a un átomo. Así un átomo de helio completamente ionizado, se compone solamente de su núcleo con dos protones y dos neutrones.

Así llegamos al siguiente modelo idealizado: Una estrella enana blanca se considerará como un sistema de N electrones en su estado base, a tal densidad que los electrones deberán ser tratados en el régimen de dinámica relativista. Los electrones se mueven sobre un volumen de $N/2$ núcleos de helio estáticos que proveen la atracción gravitacional para mantener unido al sistema completo.⁹ Este modelo debe exhibir propiedades que son los efectos combinados del Principio de Pauli, la dinámica relativista, y la ley de gravitación.

Primero se discutirá la presión ejercida por el gas de Fermi de electrones relativistas en el estado base. Los estados para un electrón individual están especificados por el momento $\mathbf{p}$ y el número cuántico para el espín $s = \pm \frac{1}{2}$. Los niveles de energía para una partícula individual son independientes de s :

$$\epsilon_{\mathbf{p}s} = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2}$$

donde m_e es la masa del electrón. La energía del estado base del gas de Fermi es:

$$E_0 = 2 \sum_{|\mathbf{p}| < p_F} \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} = \frac{2V}{h^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} dp \quad (110)$$

donde $\mathbf{p}_F$, es el momento de Fermi, y está definido como

$$\frac{V}{h^3} \left(\frac{4}{3} \pi p_F^3 \right) = \frac{N}{2}$$

ó

$$p_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2}{v} \right)^{1/3} \quad (111)$$

Cambiando la variable de integración en la ecuación 110 a $x = p/m_e c$ se obtiene

$$\frac{E_0}{N} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} v f(x_F) \quad (112)$$

⁹La temperatura en una estrella enana blanca es tan alta que los pares electrón-positrón pueden ser creados en colisiones electrón-electrón. Estos pares a su vez se aniquilan para producir radiación. Por lo tanto cuando están en equilibrio debe haber un cierto número de pares electrón-positrón y una cierta cantidad de radiación presente. Se desprecian los efectos de ambos. Se ha especulado que neutrinos también se pueden crear en interacciones electrón-electrón, electrón-positrón y fotón-fotón con una alta probabilidad. Esto lleva a varios fenómenos interesantes, ya que los neutrinos interactúan tan débilmente con la materia que no llegan a un equilibrio termodinámico con el resto del sistema. Simplemente se alejan de la estrella y causan una constante disminución de energía. Nuestro modelo desprecia estos efectos.

donde

$$f(x_F) = \int_0^{x_F} x^2 \sqrt{1+x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{3} x_F^3 (1 + \frac{3}{10} x_F^2 + \dots) & (x_F \ll 1) \\ \frac{1}{4} x_F^4 (1 + \frac{1}{x_F^2} + \dots) & (x_F \gg 1) \end{cases} \quad (113)$$

y

$$x_F \equiv \frac{p_F}{m_e c} = \frac{\hbar}{m_e c} \left(\frac{3\pi^2}{v} \right)^{1/3} \quad (114)$$

Si la masa total de la estrella es M y el radio de la estrella es R , entonces

$$\begin{aligned} M &= (m_e + 2m_P)N \approx 2m_P N \\ R &= \left(\frac{3V}{4\pi} \right) \end{aligned} \quad (115)$$

donde m_P es la masa del protón¹⁰. En términos de M y de R se tiene

$$v = \frac{8\pi m_P R^3}{3 M} \quad (116)$$

y

$$x_F = \frac{\hbar}{m_e c} \frac{1}{R} \left(\frac{9\pi}{8} \frac{M}{m_P} \right)^{1/3} \equiv \frac{\overline{M}^{1/3}}{\overline{R}} \quad (117)$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \frac{9\pi}{8} \frac{M}{m_P} \\ \overline{R} &= \frac{R}{(\hbar/m_e c)} \end{aligned} \quad (118)$$

La presión ejercida por el gas de Fermi es

$$\begin{aligned} P_0 &= -\frac{\partial E_0}{\partial V} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[-f(x_F) - \frac{\partial f(x_F)}{\partial x_F} v \frac{\partial x_F}{\partial v} \right] \\ &= \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[\frac{1}{3} x_F^3 \sqrt{1+x_F^2} - f(x_F) \right] \end{aligned} \quad (119)$$

Los límites de P_0 en los regímenes no relativistas y **extremadamente relativistas** estan dados por

¹⁰Nota del traductor: la masa del protón expresada en gramos es $m_P = 1.672621 \times 10^{-24}$ g.

$$P_0 \approx \left(\frac{m_e^4 c^5}{15\pi^2 \hbar^3} \right) x_F^5 = \frac{4}{5} K \frac{\overline{M}^{5/3}}{\overline{R}^5} (\text{límite norelativista}, x_F \ll 1) \quad (120)$$

$$P_0 \approx \left(\frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} \right) (x_F^4 - x_F^2) = K \left(\frac{\overline{M}^{4/3}}{\overline{R}^4} - \frac{\overline{M}^{2/3}}{\overline{R}^2} \right) (\text{límite extremadamente relativista}, x_F \gg 1) \quad (121)$$

donde

$$K = \frac{m_e c^2}{12\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \quad (122)$$

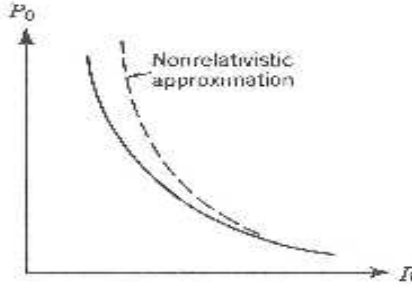


Figure 8: Presión de un gas ideal de Fermi a una temperatura de cero absoluto en los dos regímenes: aproximación no relativista (línea entrecortada) y aproximación relativista (línea continua).

Un gráfica cualitativa de P_0 en función de R , para una masa constante M , es la mostrada en la Figura 7. Se observa que, para valores pequeños de distancia, R , **la presión en el caso relativista**, P_0 , es menor de lo que se esperaría en el caso de dinámica no relativista.

La condición de equilibrio de la estrella se puede obtener a través del siguiente argumento. Imaginemos primero que no existe interacción gravitacional. Entonces la densidad del sistema será uniforme y las paredes externas serán necesarias para mantener al gas ideal de Fermi a una densidad dada. La cantidad de trabajo que un agente externo tiene que hacer para mantener a una estrella de una determinada masa de un estado de muy baja densidad (muy diluída) a un estado de densidad finita estaría dada por:

$$- \int_{\infty}^R P_0 4\pi r^2 dr \quad (123)$$

donde P_0 es la presión de un gas uniforme de Fermi y R es el radio (ó semidiámetro) de la estrella. Ahora imaginemos que la interacción gravitacional se "enciende". Diferentes partes de la estrella se atraerán una a la otra, resultando en una disminución de la energía de la estrella por una cantidad que se denomina la energía autogravitatoria. En términos dimensionales la energía autogravitatoria debe tener la forma

$$-\frac{\alpha GM^2}{R} \quad (124)$$

donde G es la constante gravitacional y α es un número puro del orden de la unidad. El valor exacto de α depende de la forma funcional de la densidad como función de la distancia espacial y no puede ser determinada por nuestro argumento. Si R es el radio de equilibrio de la estrella, la energía autogravitatoria debe forzosamente compensar exactamente el trabajo realizado para mantener finalmente a la estrella unida. Por lo tanto

$$\int_{\infty}^R P_0 4\pi r^2 dr = -\frac{\alpha GM^2}{R} \quad (125)$$

diferenciando la ec. 123 con respecto a R se obtiene la condición para el equilibrio:

$$P_0 = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4} = \frac{\alpha}{4\pi} G \left(\frac{8m_P}{9\pi} \right)^2 \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^4 \frac{\overline{M}^2}{R^4} \quad (126)$$

Hablando estrictamente, la ecuación 123 simplemente define α . Su contenido físico lo proporciona la suposición de que α es del orden de la unidad. Ahora determinamos la relación entre M y R insertando una expresión apropiada para P_0 en la ecuación 124. Esto se hará para tres casos diferentes:

(a) Supóngase que la temperatura del gas de electrones es mucho más alta que la temperatura de Fermi. Entonces el gas de electrones se puede considerar como un gas ideal de Boltzmann, con

$$P_0 = \frac{\kappa T}{v} = \frac{3\kappa T}{8\pi m_P} \frac{M}{R^3}$$

Substituyendo esta expresión en la ecuación 124 nos dá la relación lineal siguiente

$$R = \frac{2}{3} \alpha M \frac{m_P G}{\kappa T} \quad (127)$$

Este caso, sin embargo, nunca se aplica para una estrella enana blanca.

(b) Supóngase que le gas de electrones está a una densidad tan baja que el caso de dinámica no-relativista puede utilizarse ($x_F \ll 1$). Entonces P_θ está dada por la expresión 120 y la expresión 124 nos da la condición de equilibrio

$$\frac{4}{5}K \frac{\overline{M}^{5/3}}{\overline{R}^5} = K' \frac{\overline{M}^2}{\overline{R}^4}$$

donde

$$K' = \frac{\alpha}{4\pi} G \left(\frac{8m_P}{9\pi} \right)^2 \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^4 \quad (128)$$

de donde se aprecia que el radio de la estrella disminuye mientras que aumenta la masa de la estrella:

$$\overline{M}^{1/3} \overline{R} = \frac{4}{5} \frac{K}{K'} \quad (129)$$

Esta condición es válida cuando la densidad es baja. Por lo tanto el caso es válido para estrellas con baja masa M , y grandes semidiámetros R .

(c) Supóngase que el gas de electrones está a tan alta densidad que los efectos relativistas son importantes ($x_F \gg 1$). Entonces, la presión está dada por la expresión 121. La condición de equilibrio se convierte en:

$$K \left(\frac{\overline{M}^{4/3}}{\overline{R}^4} - \frac{\overline{M}^{2/3}}{\overline{R}^2} \right) = K' \frac{\overline{M}^2}{\overline{R}^4} \quad (130)$$

ó

$$\overline{R} = \overline{M}^{2/3} \sqrt{1 - (\overline{M}/\overline{M}_0)^{2/3}} \quad (131)$$

donde

$$\overline{M}_0 = \left(\frac{K}{K'} \right)^{3/2} = \left(\frac{27\pi}{64\alpha} \right)^{3/2} \left(\frac{\hbar c}{Gm_P^2} \right)^{3/2} \quad (132)$$

Evaluando las constantes numéricamente, se tiene

$$\frac{\hbar c}{Gm_P} \approx 10^{39} \quad (133)$$

Este interesante número es la energía de reposo de X dividida por la atracción gravitacional de dos protones separados por la longitud de onda de Compton de X , donde X

puede ser cualquier cosa. La masa M_0 correspondiente a la masa reducida, $\overline{M}_0$ es la masa del Sol (tomando $\alpha \approx 1$:

$$M_0 = \frac{8}{9\pi} m_P \overline{M}_0 \approx 10^{33} g \approx M_\odot \quad (134)$$

La fórmula 129 es válida para altas densidades ó para el límite cuando $R \rightarrow 0$. Es por lo tanto válida para una estrella con masa $\mathbf{M}$ muy cerca de $\mathbf{M}_0$. Nuestro modelo nos lleva a una gran predicción de que ninguna estrella enana blanca puede tener una masa más grande que $\mathbf{M}_0$, porque de otra manera la expresión 129 nos daría un radio imaginario. La razón física detrás de este resultado es que si la masa fuese mas grande que una cierta cantidad, la presión que viene del principio de exclusión de Pauli no es suficiente para prevenir que el gas tienda a un colapso gravitacional.

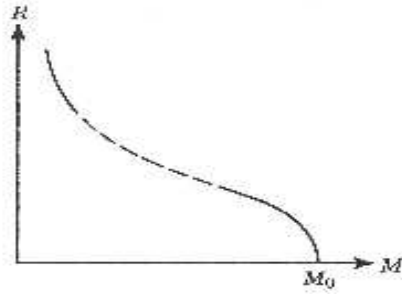


Figure 9: Relación Radio - Masa para una estrella enana blanca donde la densidad del gas es tan alta que los efectos relativísticos son importantes.

La relación radio - masa de una estrella enana blanca, de acuerdo a nuestro modelo, tiene la forma que se muestra en la Figura 9, donde las líneas continuas indican las regiones cubiertas por las expresiones 127 y 129. No hemos podido ser capaces de calcular α , de tal manera que un valor exacto de M_0 no se puede obtener. Condiciones más refinadas¹¹ dan el resultado:

$$M_0 = 1.4M_\odot \quad (135)$$

Esta masa es conocida como el límite de Chandrasekhar. Así, de acuerdo con nuestro modelo, **ninguna estrella puede convertirse en enana blanca** a menos de que su masa sea menor que $1.4M_\odot$. Esta conclusión ha sido verificada a través de observaciones astronómicas. La respuesta a la pregunta de ¿cómo evoluciona una estrella si su

¹¹Ver el libro de S. Chandrasekhar, 1957, Stellar Structure (Editorial Dover, New York, Capítulo IX.

masa es mayor que $1.4M_{\odot}$ todavía no se conoce. Es posible que estas estrellas terminen sus vidas convirtiéndose en supernovas.

Agradecimientos

JAGB desea agradecer el apoyo económico parcial del proyecto PAPIIT IN 108011-2, de la DGAPA, UNAM para producir este material didáctico utilizado en el curso de Astrofísica General y hacerlo accesible a todo estudiante interesado al producir el texto en formato pdf y tenerlo en mi página web, (dentro de la página web del IA-UNAM) <http://www.astroscu.unam.mx/~tony>.