

Inestabilidades: La Longitud de Jeans y el Criterio de Toomre

José Antonio García-Barreto

*Instituto de Astronomía,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Apdo Postal 70-264, México D.F. 04510, México;
tony@astroscu.unam.mx*

Traducción de la sección 9.5 del libro *The Milky Way as a Galaxy* de los autores, G. Gilmore, I. R. King, P. van der Kruit, 1989, Editado por R. Buser, Mill Valley, California: University Science Books

Octubre 2007

Hace algún tiempo Jeans (1929, p. 340) intentó estudiar el proceso de un volúmen de gas autogravitante y encontró que bajo ciertas condiciones puede ser lo suficientemente inestable para colapsarse bajo su propia auto gravitación. Su análisis consideró un gas adiabático con $p \propto \rho^\gamma$. Haremos lo mismo aquí para un sistema estelar.

(Antes de entrar en detalles, debemos aclarar un poco el vocabulario que se utilizará. Una configuración se dice que es *estable* si **no** forma condensaciones locales, e *inestable* si sí las forma. Esto puede ser confuso dado que las nuevas cuerpos debido a las contracciones mismas son la mayoría de las veces estables. Aún así, esta es la manera común de referirse a ese proceso y se debe recordar cuidadosamente.)

Conceptualmente nos hacemos la pregunta simple: ¿podrá la fuerza de gravitación causar que una configuración se contraiga más rápido en comparación a las velocidades que causarían que se separara? Para responder a esta pregunta calculamos un tiempo característico para cada proceso y simplemente concluimos que el proceso más rápido ganará. Como se podría esperarse, cuando se consideran dimensiones pequeñas, las velocidades ganarán; considerando grandes distancias la fuerza de gravitación predominará. Así encontraremos que existe una longitud crítica que sirve como comparación: a dimensiones mayores que esa longitud la fuerza de gravitación ganará.

Considérese una región esférica con gas, de radio L y densidad ρ , de tal manera que su masa es $M = \frac{4\pi L^3 \rho}{3}$. Si una partícula en la superficie no tiene nada que la detenga, caerá hacia el centro en un medio del periodo de una órbita elíptica angosta cuyo semieje mayor es $L/2$. (Todo lo que esté a distancias menores también caerán igualmente rápido, dado que dentro de una distribución homogénea esférica todos los periodos son idénticos.) El tiempo para la contracción debido a la fuerza gravitacional es:

$$\begin{aligned} T_{contr} &= \frac{1}{2} \frac{2\pi(L/2)^{3/2}}{\sqrt{GM}} \\ T_{contr} &= \frac{\pi}{2^{3/2}} \cdot \frac{L^{3/2}}{\sqrt{G \cdot \frac{4}{3}\pi L^3 \rho}} \\ T_{contr} &= \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}} \end{aligned}$$

Por otro lado, si no hubiese fuerza de gravitación, una estrella se movería hasta una distancia L en $T_{esc} = L/\langle v^2 \rangle^{1/2}$. En el caso crítico, estos dos tiempos son iguales y la distancia para que la igualdad se dé es:

$$L_J = \sqrt{\frac{3\pi \langle v^2 \rangle}{32 G \rho}}.$$

A esta distancia ó longitud se le conoce como la **Longitud de Jeans**; si $L > L_J$, entonces las estrellas no se moverán con la suficiente velocidad y ocurrirá una contracción. O, dicho de otra manera, en un medio interestelar que se caracteriza por valores como $\langle v^2 \rangle$ y ρ , todas las longitudes $\geq L_J$ serán gravitacionalmente inestables. (Aclaración: el análisis de Jeans para el gas tenía 5/9 en vez de 3/32. La diferencia no es importante dado que simplemente estamos encontrando un orden de magnitud, es decir, un valor aproximado.)

La longitud de Jeans es de gran importancia en discusiones de la formación de galaxias, grupos de estrellas, grupos de galaxias, y casi todo lo que se puede uno imaginar que se pueda condensar en un Universo homogéneo en su origen. Usualmente no se expresa como una longitud, sino como la **masa de Jeans**, la cual son las dimensiones de las estructuras que serán favorecidas por este proceso de inestabilidad gravitacional. Nuestra aplicación aquí, sin embargo, estará relacionada con la estabilidad del disco estelar y necesitaremos solamente mencionar las longitudes.

La situación con nuestra Vía Láctea es un poco diferente del problema considerado por Jeans. No sólo tenemos una estructura aplanada en vez de una estructura esferoideal, sino aun más importante existe rotación diferencial. Dado que esto último involucra diferencias de velocidades que son proporcionales a ΔR , podría prevenir que se llevaran a cabo contracciones (gravitacionales) si la escala es muy grande. Si fuera así tenemos la protección contra la contracción gravitacional a través de la dispersión de velocidades para dimensiones pequeñas y rotación diferencial para la protección contra la contracción gravitacional para dimensiones grandes. ¿Pero qué pasa para dimensiones intermedias? Esto es lo que Toomre (1964) analizó en detalle. El inició con una discusión intuitiva aproximada y prosiguió con un análisis más riguroso. Aquí seguiremos el espíritu de su introducción intuitiva y simplemente mencionaremos su resultado más exacto al final.

Dado que la Vía Láctea es de forma de disco en vez de ser esferoideal, repetimos el mismo análisis anterior, pero con $M = \pi L^2 \mu$, donde μ es la densidad (de material) por unidad de superficie; pero seguiremos tomando el disco como si fuese una región de dimensiones pequeñas, ó en el límite sería un punto, con masa idéntica a la masa del disco que ejerciese (aproximadamente) la fuerza de atracción gravitacional. (Esto no significa necesariamente cometer un gran error; una esfera reducida a una forma de disco con mínima altura ejerce su fuerza de atracción gravitacional en su ecuador con un factor menor que 2.) Así tenemos para el tiempo de contracción gravitacional, en forma similar al planteamiento anterior,

$$T_{contr} = \frac{\pi}{2^{3/2}} \cdot \frac{L^{3/2}}{\sqrt{G \cdot \pi L^2 \mu}}$$

$$T_{contr} = \sqrt{\frac{\pi}{8} \cdot \frac{L}{G\mu}}.$$

Cuando igualamos esta expresión a $T_{esc} = L/\langle v^2 \rangle^{1/2}$, el resultado es:

$$L_J = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\langle v^2 \rangle}{G\mu};$$

nótese la expresión diferente del caso esferoideal. [Toomre simplemente afirma que lo que estamos denominando T_{contr} “puede ser estimarse como del orden de $(L/G\mu)^{1/2}$ ”, de tal forma que él no tiene el factor $\pi/8$.]

La contribución importante de Toomre fué considerar la inestabilidad de Jeans en la presencia de rotación diferencial. Como se indicó previamente, el problema ahora involucra tres aspectos; el nuevo elemento adicional es que hemos introducido un mecanismo de separación centrífuga que es efectivo cuando se consideran *grandes dimensiones*. Lo que haremos primero es analizar el balance entre la rotación diferencial y la auto gravitación. La rotación diferencial se manifiesta físicamente por sí misma a través del hecho de que una región que se contrae conserva el momento angular ¹. Este proceso hace que rote más rápidamente y crea una fuerza centrífuga que pudiera ser capaz de inhibir que continúe la contracción. Lo primero que hay que notar es que del análisis de Oort de la rotación diferencial local que la velocidad angular promedio (con respecto a un sistema fijo) es B. Ahora consideraremos una región de distancia (del centro) inicial L_0 . Su momento angular a la distancia, por unidad de masa, es $L_0^2 B$; si se contrae a una distancia (del centro) L , la conservación de momento angular requiere que $L^2 \Omega = L_0^2 B$, de tal manera que la velocidad angular, Ω , será $\Omega = L_0^2 B / L^2$. Asociada a esta velocidad angular está la aceleración centrífuga, dirigida hacia mayores distancias del centro,

¹Nota del traductor: el momento angular en una dimension se puede expresar como $I = m r v$; o si se reemplaza v por ωr , entonces $I = m \omega r^2$, donde m es la masa del objeto, r es la distancia al centro de rotación, ω es la velocidad angular y v es la velocidad lineal en el punto tangente

cuya magnitud es $F_r = L\Omega^2 = L_0^4 B^2 / L^3$. También existe una aceleración gravitacional, dirigida hacia menores distancias del centro, cuya magnitud es $F_g = G \cdot \pi L_0^2 \mu / L^2$. La pregunta es, si estas dos aceleraciones (fuerzas) están inicialmente en equilibrio (iguales una a la otra) y después de un cierto intervalo de tiempo existe una disminución de la distancia del objeto, ¿cual se incrementará más y por lo tanto será más importante? Si la aceleración centrífuga gana, la configuración (estructura) es estable.

Supongamos que las dos están en equilibrio en $L = L_0$ y nos preguntamos qué pasaría si hubiese una contracción pequeña, $-dL$. Entonces,

$$dF_r = \frac{3L_0^4 B^2}{L^4} dL, \quad dF_g = \frac{2G\pi L_0^2 \mu}{L^3} dL.$$

La condición de que estén en equilibrio en $L = L_0$ es:

$$3B^2 = \frac{2G\pi\mu}{L_0}.$$

Si denominamos L_{rot} a L_0 , entonces

$$L_{rot} = \frac{2\pi G\mu}{3B^2}.$$

Encontramos que la rotación diferencial estabilizará un disco, es decir, no dejará que la fuerza de atracción gravitacional ejerza una contracción, para escalas de longitudes tales que $L > L_{rot}$.

Un disco puede, por lo tanto, ser gravitacionalmente inestable solo en el intervalo de dimensiones intermedias $L_J < L < L_{rot}$, si es que existe este intervalo de dimensiones intermedias, es decir, si $L_{rot} > L_J$. Esa fué la gran contribución de Toomre: que la condición mínima para estabilidad de un disco es que $L_{rot} = L_J$, ó

$$\frac{2\pi G\mu}{3B^2} = \frac{\pi \langle v^2 \rangle}{8 G\mu},$$

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{G\mu}{B}.$$

Si las estrellas de un disco tienen menor dispersión de velocidades que esta expresión, el disco será inestable.

El resultado más elaborado (y más complicado) daba, en la notación de Toomre,

$$\sigma_{u,min} = 3.36 \frac{G\mu}{\kappa},$$

donde κ es la frecuencia epicíclica. A esta expresión se le conoce como **El Criterio de Toomre**. (En la vecindad del sol la dispersión de velocidades es $\sim 30 \text{ km s}^{-1}$.) Si σ_u fuese menor, entonces ocurrirían contracciones gravitacionales y colisiones de estrellas con estas estructuras gaseosas, incrementarían σ_u hasta $\sigma_{u,min}$.

El cociente de la dispersión de velocidad real entre $\sigma_{u,min}$ se denota usualmente en astronomía como Q . Es una cantidad importante en el estudio de la dinámica de discos y en particular en las teorías que tratan de explicar las estructuras curvas y angostas, comunmente denominadas brazos espirales.

Hay que señalar, sin embargo, que el análisis de Toomre se aplica solo a inestabilidades axisimétricas y que la longitud L_T , donde $L_{rot} = L_J$, es de varios kiloparsecs. Esto es, la violación del criterio de Toomre no provee directamente un mecanismo para la formación de brazos espirales. Nótese también que los discos pueden estar sujetos a otras inestabilidades, tales como la formación de una barra central estelar.

Agradecimientos

JAG-B desea agradecer el apoyo parcial del Proyecto de DGAPA-UNAM IN-107806.

Bibliografía

- Gilmore, G., King, I. R., van der Kruit, P. 1989 *The Milky Way as a Galaxy*, Editor R. Buser, Mill Valley, California: University Science Books.
- Toomre, A. 1964, The Astrophysical Journal, Vol. **139**, p. 1217