

Estructura y Evolución de las Estrellas

Dany Page

Instituto de Astronomía

Universidad Nacional Autónoma de México

ALGUNOS DATOS GENERALES SOBRE ESTRELLAS

Visión Artística de la Vía Láctea



La Vía Láctea



La galaxia NGC 4565:
muy parecida a la Vía Láctea

La Vía Láctea



La galaxia NGC 4565:
muy parecida a la Vía Láctea

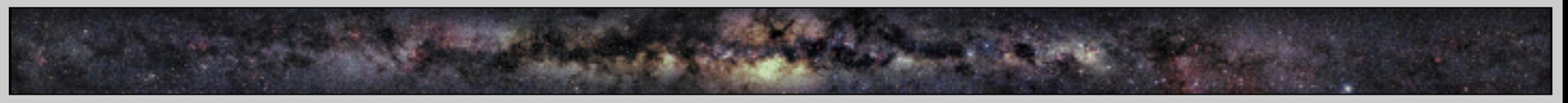


La Vía Láctea tal como la vemos (en el óptico)

La Vía Láctea



La galaxia NGC 4565:
muy parecida a la Vía Láctea



La Vía Láctea tal como la vemos (en el óptico)



La Vía Láctea tal como la vemos (en el infrarrojo cercano)

La Vía Láctea



La galaxia NGC 4565:
muy parecida a la Vía Láctea

Oscurecimiento debido
a nubes de polvo



La Vía Láctea tal como la vemos (en el óptico)



La Vía Láctea tal como la vemos (en el infrarrojo cercano)

La Vía Láctea



Se estima que hay entre
100 y 200 mil millones de
estrellas
en la Vía Láctea

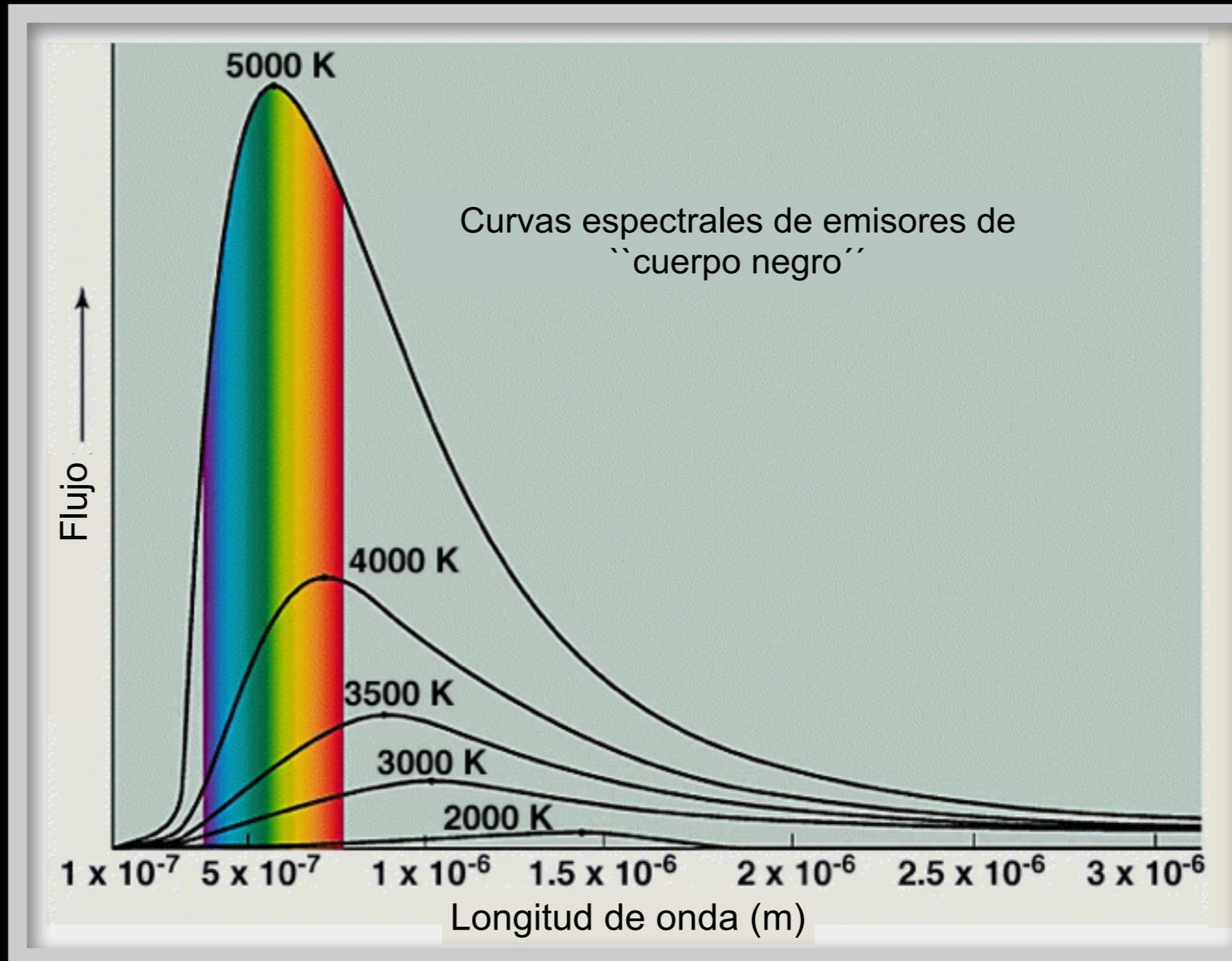


La Vía Láctea tal como la vemos (en el óptico)



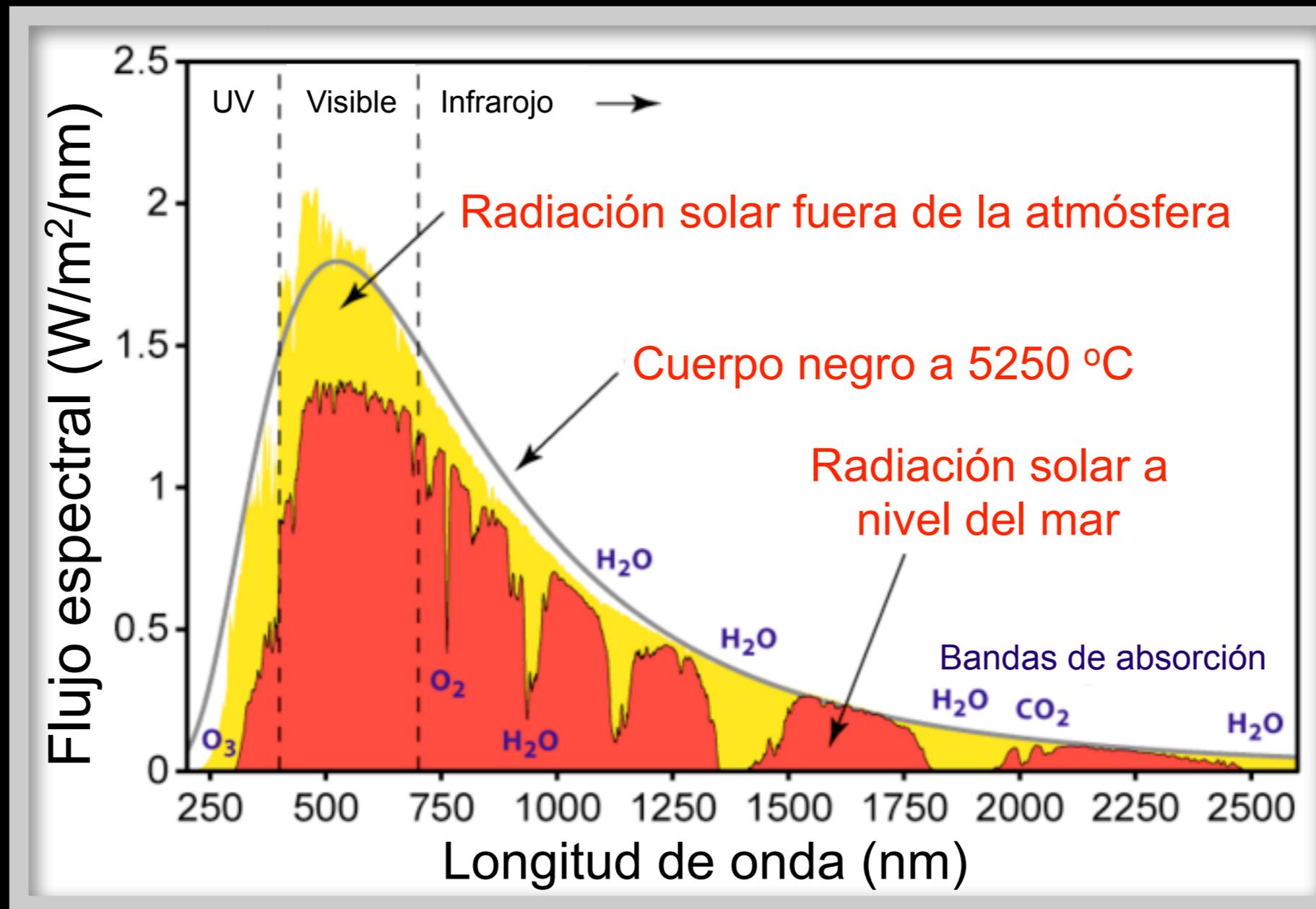
La Vía Láctea tal como la vemos (en el infrarrojo cercano)

El Espectro de “Cuerpo Negro”

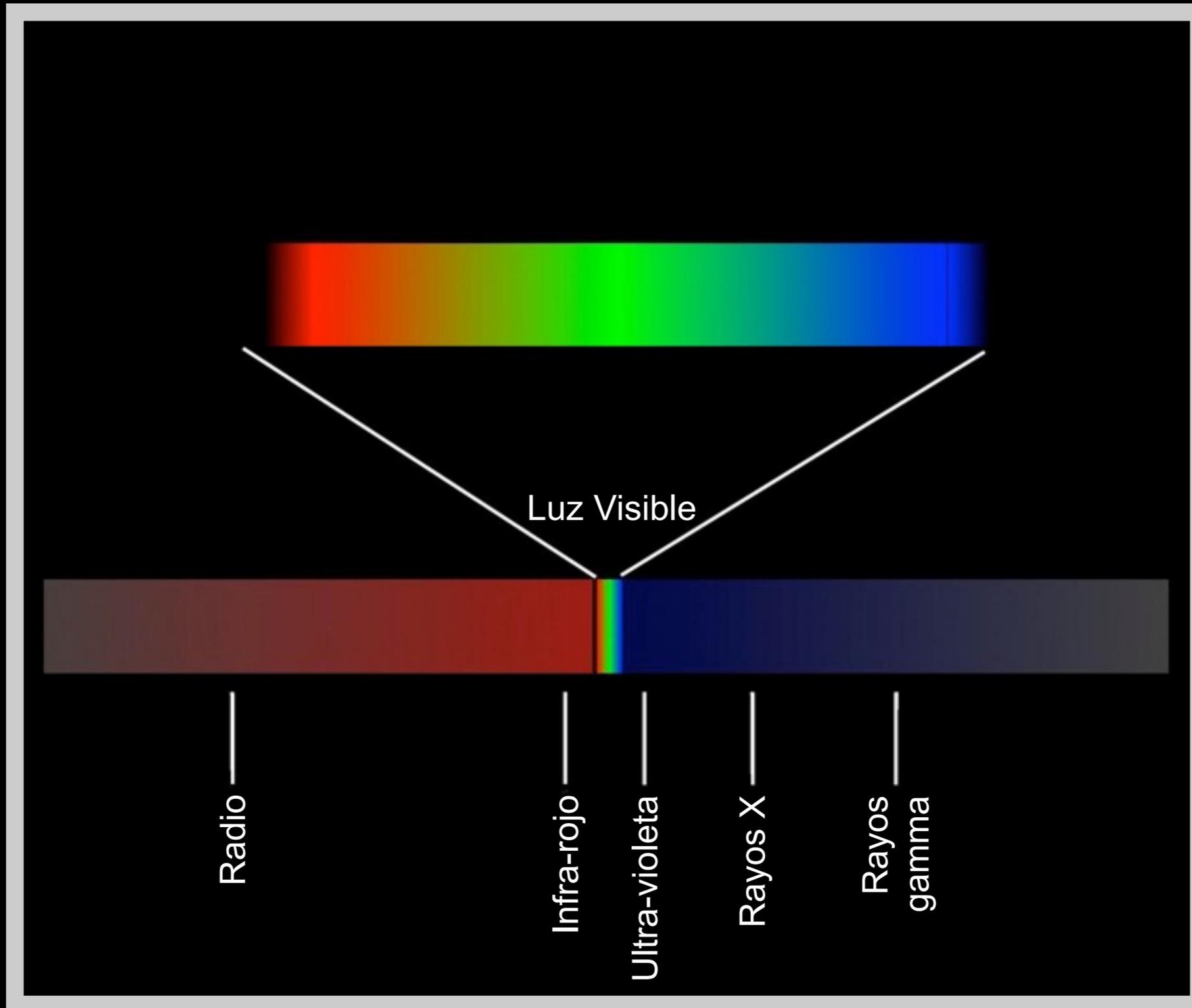


El “color” de una estrella nos indica su temperatura

El Espectro del Sol



El Espectro Electromagnético



Luminosidad versus Brillo



El **brillo** se refiere a la apariencia de la estrella: depende la **luminosidad** de la estrella y de su **distancia**. Se expresa con la magnitud (o, mejor, la magnitud aparente)

LUMINOSIDAD = energía emitida por segundo [erg s^{-1}]

Es una propiedad intrínseca de la estrella, independiente de su distancia. Se expresa a menudo con la **magnitud absoluta** = magnitud que tuviera la estrella si su distancia fuera de 10 parsecs (= 31.6 años luz)

Ejemplo: $L_{\text{Sol}} = 3.826 \times 10^{26} \text{ J s}^{-1} = 3.826 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$

Luminosidad versus Brillo

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log(s_1/s_2)$$

$$s = \text{''iluminación''}: s = \frac{L}{4\pi D^2}$$

se mide en $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2}$
(unidad ``oficial``: $\text{lux} = 1.5 \text{ erg s}^{-1} \text{cm}^{-2}$)

$$\Delta m = 5 \implies s_2/s_1 = 100$$

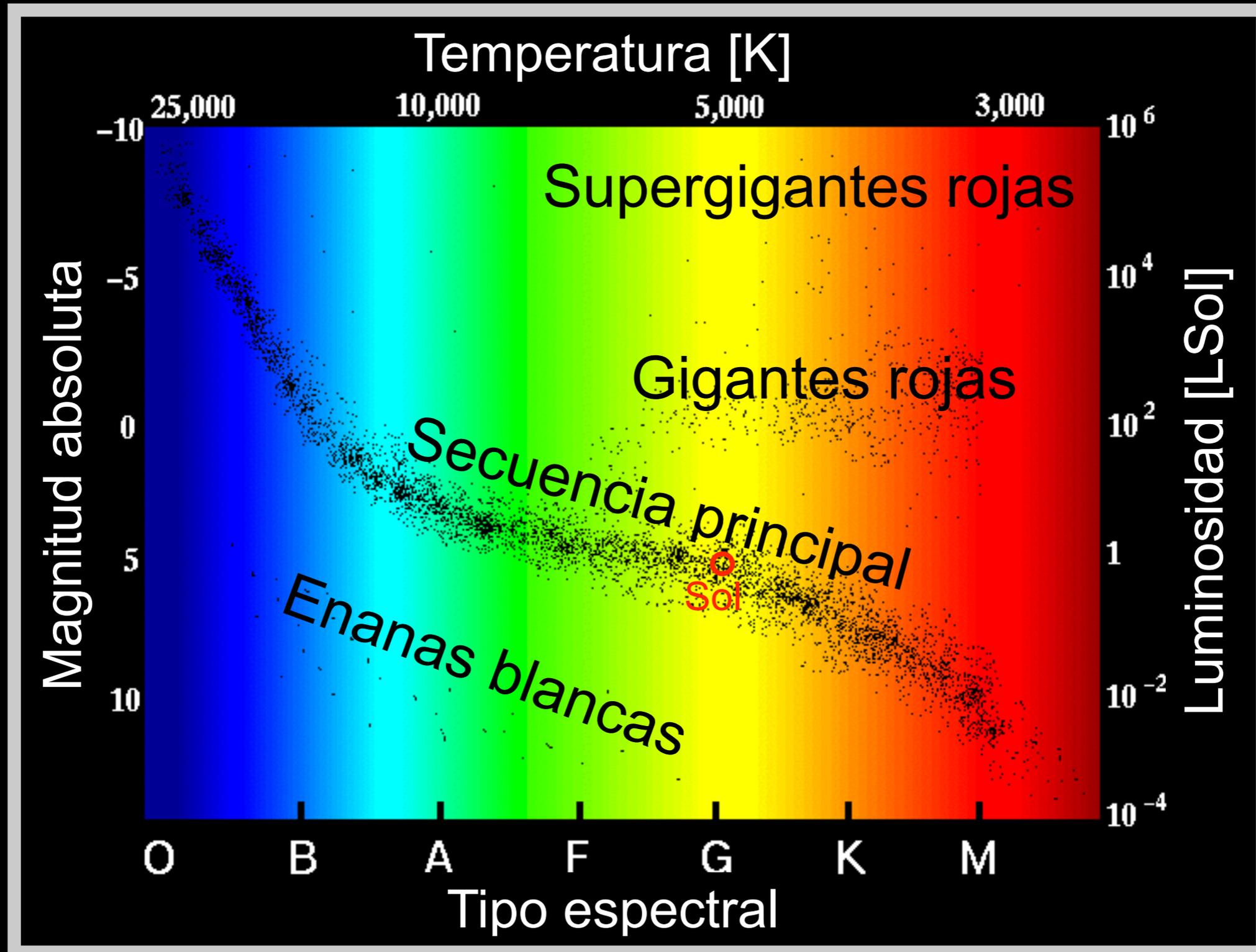
El **brillo** se refiere a la apariencia de la estrella: depende la **luminosidad** de la estrella y de su **distancia**. Se expresa con la magnitud (o, mejor, la magnitud aparente)

LUMINOSIDAD = energía emitida por segundo [erg s^{-1}]

Es una propiedad intrínseca de la estrella, independiente de su distancia. Se expresa a menudo con la **magnitud absoluta** = magnitud que tuviera la estrella si su distancia fuera de 10 parsecs (= 31.6 años luz)

$$\text{Ejemplo: } L_{\text{Sol}} = 3.826 \times 10^{26} \text{ J s}^{-1} = 3.826 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$$

El Diagrama de Herzprung-Russell



**¿COMO SE HACE
UN
MODELO ESTELAR ?**

Los Dos Principios Básicos

Equilibrio de fuerzas:

- Lucha entre la gravedad y la presión de la materia.

Equilibrio energético:

- La energía nuclear, o la energía gravitacional, compensan la energía perdida por radiación.

Cuando uno de estos dos equilibrios se rompe la estrella está en serios problemas.

Modelos con Simetría Esférica

Esfera de radio R y masa M

Todas la cantidades dependen solo de r :

$\rho = \rho(r)$ = densidad

$P = P(r)$ = presión

$T = T(r)$ = temperatura

...

En el centro:

$r = 0$: $\rho = \rho_c$ $P = P_c$ $T = T_c$...

En la superficie:

$r = R$: $\rho \sim 0$ $P \sim 0$ $T = T_e$...

Luminosidad y Temperatura Efectiva

Energía emitida por un cuerpo negro:

Flujo = $\sigma_{SB} T^4$: energía/tiempo/area = erg/s/cm²

$\sigma_{SB} = 5.67 \times 10^{-5}$ erg/s/cm²/K⁴ (Stefan-Boltzmann)

Energía emitida por una estrella:

Luminosidad = Flujo x Area: erg/s

$$L = 4\pi R^2 \sigma_{SB} T_e^4$$

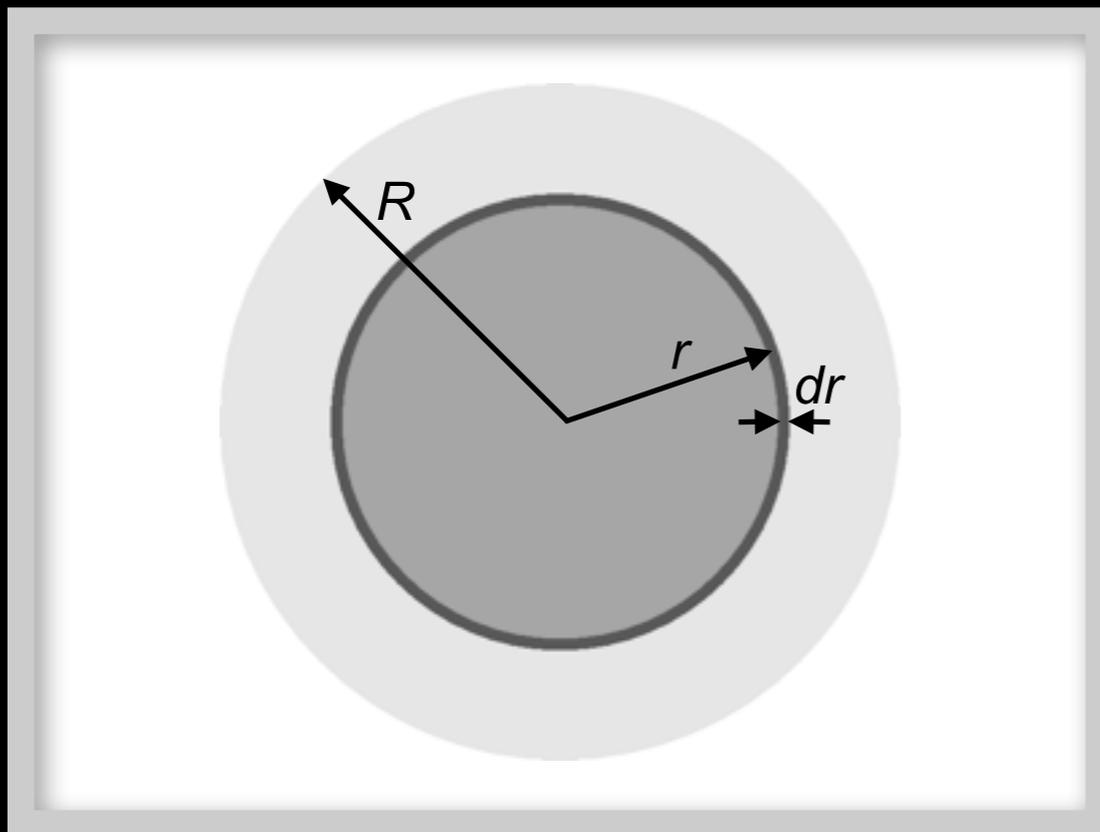
T_e = **temperatura efectiva** (por analogía con el cuerpo negro)
Es representativa de la temperatura en la “superficie”

Ecuación de Masa y Ecuación de Equilibrio Hidrostático

La Ecuación de Masa

$4\pi r^2$ = area de la esfera de radio r

$4\pi r^2 dr$ = volumen de la capa esférica de radio r y espesor dr



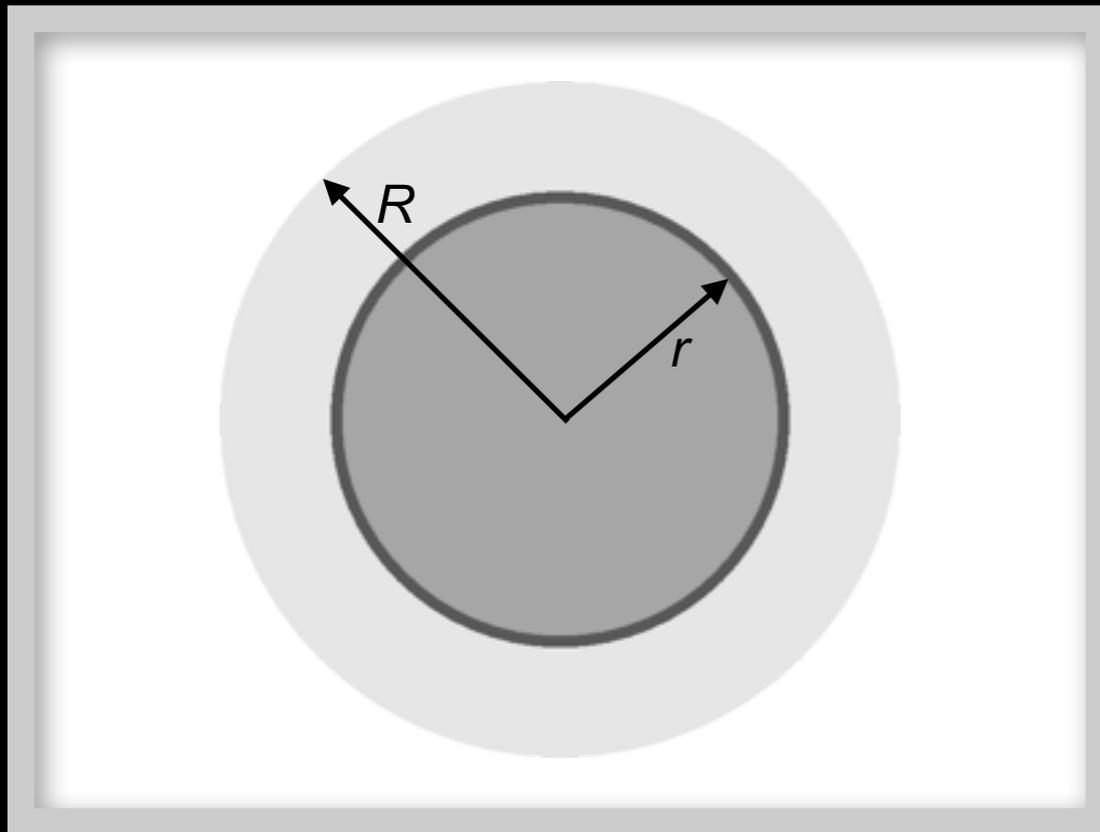
ρ = densidad = masa/volumen

m_r = masa interior al radio r

$$dm_r = 4\pi r^2 dr \cdot \rho$$

$$m_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr$$

La Fuerza de la Gravedad



m_r = masa interior al radio r
 ρ = densidad = masa/volumen

$$dm_r = 4\pi r^2 dr \cdot \rho$$

$$m_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr$$

Teorema de Gauss:

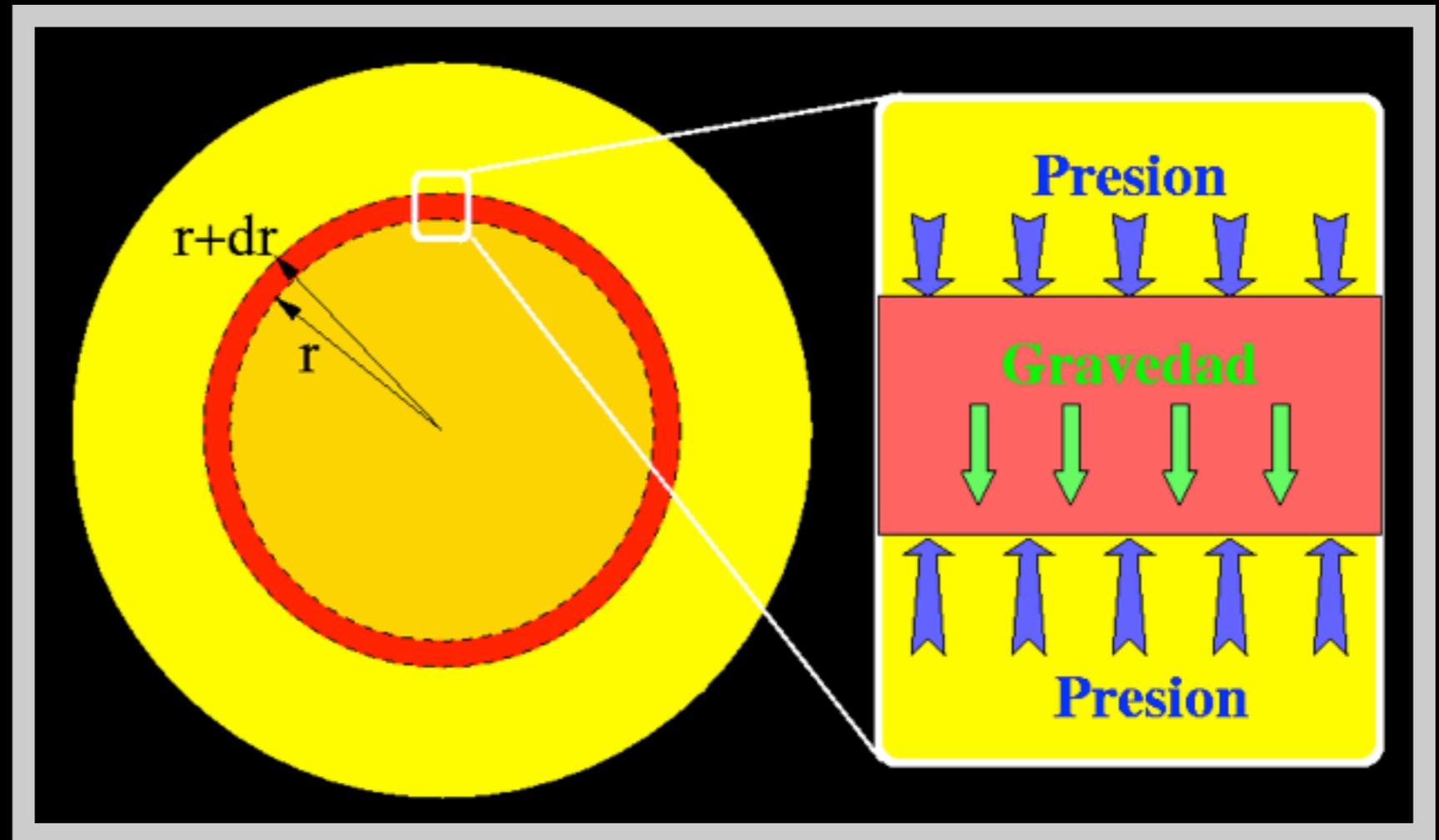
En un cuerpo esférico la fuerza de la gravedad sólo depende de la masa incluida dentro del radio r

$$g = \frac{Gm_r}{r^2}$$

El Equilibrio Hidrostático

Ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm_r\rho}{r^2}$$



El Equilibrio Hidrostático

Equilibrio de fuerzas se escribe

$$P(r)dA = P(r + dr)dA + F_G$$

donde dA = area de la sección del elemento de volumen y F_G = fuerza de la gravedad:

$$F_G = g dm = g \rho (dr \cdot dA) .$$

Con

$$P(r + dr) = P(r) + \frac{dP}{dr} dr$$

tenemos

$$P(r)dA = P(r)dA + \frac{dP}{dr} dr dA + g \rho (dr \cdot dA)$$

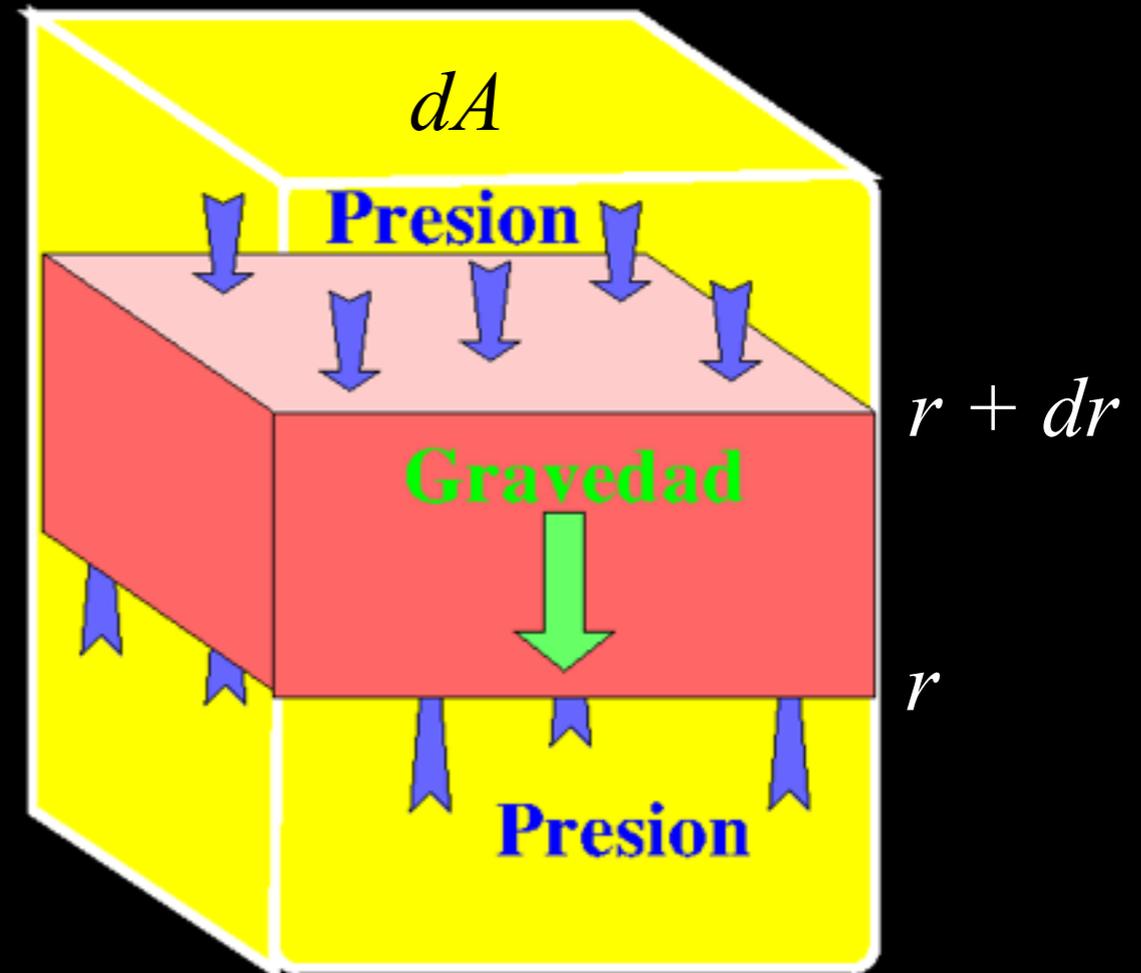
ó

$$0 = \frac{dP}{dr} dr dA + g \rho dr dA$$

y con

$$g = \frac{Gm_r}{r^2}$$

tenemos la ecuación de equilibrio hidrostático.



$$\frac{dP}{dr} = - \frac{Gm_r \rho}{r^2}$$

Consecuencia Trivial del Equilibrio Hidrostático

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm_r\rho}{r^2}$$

$\frac{dP}{dr} < 0 \implies P$ decrece del centro hacía la superficie

P es una función diferenciable y, obviamente **continua**.

Nota: la densidad ρ puede ser discontinua
(ejemplo en la Tierra: interfase suelo-atmósfera)

El Tiempo de Explosión

Ecuación de movimiento
(es decir, fuera de equilibrio):

$$\rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{dP}{dr} - \frac{Gm_r \rho}{r^2}$$

Explosión:

$$\rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{dP}{dr} - \cancel{\frac{Gm_r \rho}{r^2}} \quad \frac{\rho R}{\tau_{\text{exp}}^2} \sim \frac{P}{R} \Rightarrow \tau_{\text{exp}} \sim R \left(\frac{\rho}{P} \right)^{1/2}$$

$$\frac{P}{\rho} \simeq v_{\text{son}}^2 \Rightarrow \tau_{\text{exp}} \sim \frac{R}{v_{\text{son}}}$$

El tiempo de explosión es (aproximadamente) el tiempo que tarda una onda de sonido en atravesar la estrella

El Tiempo de Implosión

Ecuación de movimiento
(es decir, fuera de equilibrio): $\rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{dP}{dr} - \frac{Gm_r \rho}{r^2}$

Implosión (colapso gravitacional):

$$\rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\cancel{\frac{dP}{dr}} - \frac{Gm_r \rho}{r^2} \quad \frac{\rho R}{\tau_{\text{col}}^2} \sim \frac{GM\rho}{R^2} \Rightarrow \tau_{\text{col}} \sim \left(\frac{R}{g}\right)^{1/2}$$

o sea : $R \sim g \tau_{\text{col}}^2$

El tiempo de colapso es (aproximadamente) el tiempo que tarda una pelota en caída libre en alcanzar el centro de la estrella

El Tiempo de Equilibrio Hidrostático

Mientras la estrella está en equilibrio hidrostático

$$\tau_{\text{col}} = \tau_{\text{exp}} \implies \tau_{\text{hidro}} \approx \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}$$

Para el Sol:

$$\tau_{\text{hidro}} \sim 30 \text{ minutos !}$$

$$M = 2 \times 10^{33} \text{ g} \quad R = 7 \times 10^{10} \text{ cm}$$

Para una enana blanca:

$$\tau_{\text{hidro}} \sim 5 \text{ segundos !}$$

$$M = M_{\text{Sol}} \quad R \sim R_{\text{Sol}}/50 \sim 10^9 \text{ cm}$$

Para una gigante roja:

$$\tau_{\text{hidro}} \sim 3 \text{ semanas !}$$

$$M = M_{\text{Sol}} \quad R \sim 100 \times R_{\text{Sol}} \sim 10^{13} \text{ cm}$$

El Tiempo de Equilibrio Hidrostático

Mientras la estrella está en equilibrio hidrostático

$$\tau_{\text{hidro}} \approx \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}$$

Significado del tiempo hidrostático:
una perturbación al equilibrio hidrostático
se corrige en un tiempo τ_{hidro}

En particular: la estrellas pulsantes (Cefeidas, RR-Lyrae) tienen periodos de pulsación dados por τ_{hidro} .

Energetica Global: Energía Gravitacional Energía Interna Teorema del Virial

Energía gravitacional

Energía gravitacional:
$$E_G = - \int_0^R \frac{Gm}{r} dm$$

La podemos escribir como:
$$E_G = -\alpha \frac{GM^2}{R} \quad \text{con } \alpha \sim 1$$

Ejemplo: esfera con densidad uniforme:
$$E_G = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Ejemplo: el Sol:
$$\frac{GM^2}{R} = 3.8 \times 10^{48} \text{ ergs} \quad E_G = -6 \times 10^{48} \text{ ergs} = -1.6 \frac{GM^2}{R}$$

(obtenido por el “modelo solar estandar”)

Energía Interna (Térmica)

Energía térmica de una gas ideal:
$$E_T = \int_0^N \frac{3}{2} k_B T dn$$

(n = número de partículas, k_B = constante de Boltzmann)

Para un gas ideal : $P = nk_B T$ y $e_T = \frac{3}{2} P = \frac{3}{2} nk_B T$ e_T = energía por unidad de volumen

Para un gas ideal politropico : $P = K \rho^\gamma$ y $P = (\gamma - 1) e_T$
 $\implies e_T = \frac{3}{2} k_B n T$ si $\gamma = 5/3$

Energía por unidad de masa: $u = \frac{e_T}{\rho}$ y $\frac{P}{\rho} = (\gamma - 1) u$ o $u = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}$

Energía térmica de una gas ideal:

$$E_T = \frac{1}{\gamma - 1} \int_0^M \frac{P}{\rho} dm$$

Teorema del Virial

En condiciones de equilibrio hidrostático:

$$\text{Teorema del Virial: } E_T = -\frac{1}{2}E_G$$

Escribamos el equilibrio hidrostático como

$$dP = -\frac{Gm}{r^2} \rho dr$$

y multiplicamos por $v_r = \frac{4}{3}\pi r^3$. El lado derecho nos da

$$-\frac{Gm}{r^2} \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 dr = -\frac{1}{3} \frac{Gm_r}{r} \cdot 4\pi r^2 \rho dr = -\frac{1}{3} \frac{Gm_r}{r} \cdot dm_r$$

e integrando del centro a la superficie:

$$\int_0^M \left(-\frac{1}{3} \frac{Gm_r}{r} \cdot dm_r \right) = \frac{1}{3} E_G$$

El lado izquierdo, integrando por partes, nos da (usando $\rho dv_r = dm_r$):

$$\int_{P_c}^0 v_r dP = [v_r P]_{P_c}^0 - \int_0^V P dv_r = - \int_0^M \frac{P}{\rho} dm_r = -(\gamma-1) \int_0^M u dm_r = -(\gamma-1) E_T$$

Juntando todo:

$$\frac{1}{3} E_G = -(\gamma-1) E_T \quad \circ \quad E_G = -3(\gamma-1) E_T$$

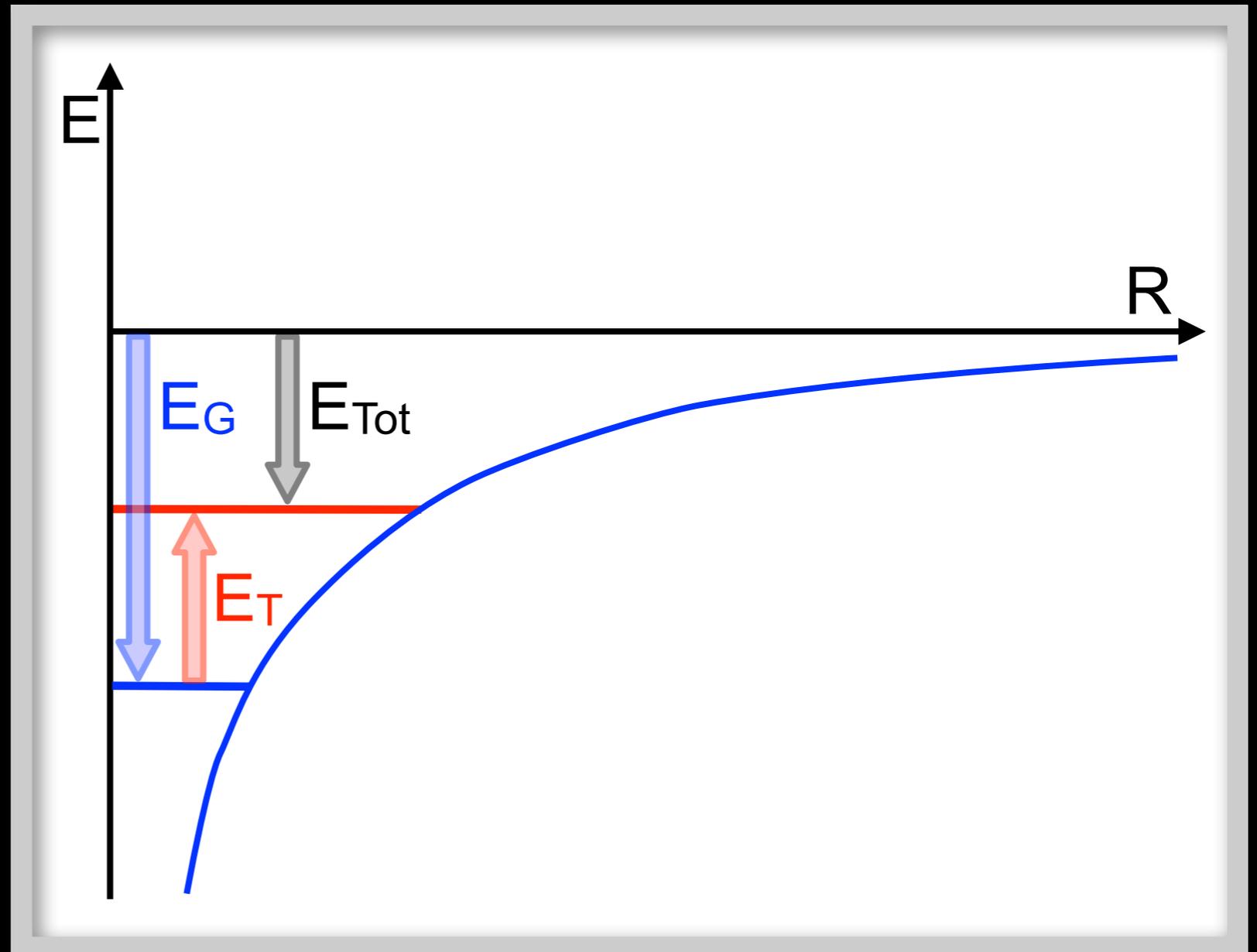
Energía Total

Teorema de Virial: $E_T = -\frac{1}{2}E_G$

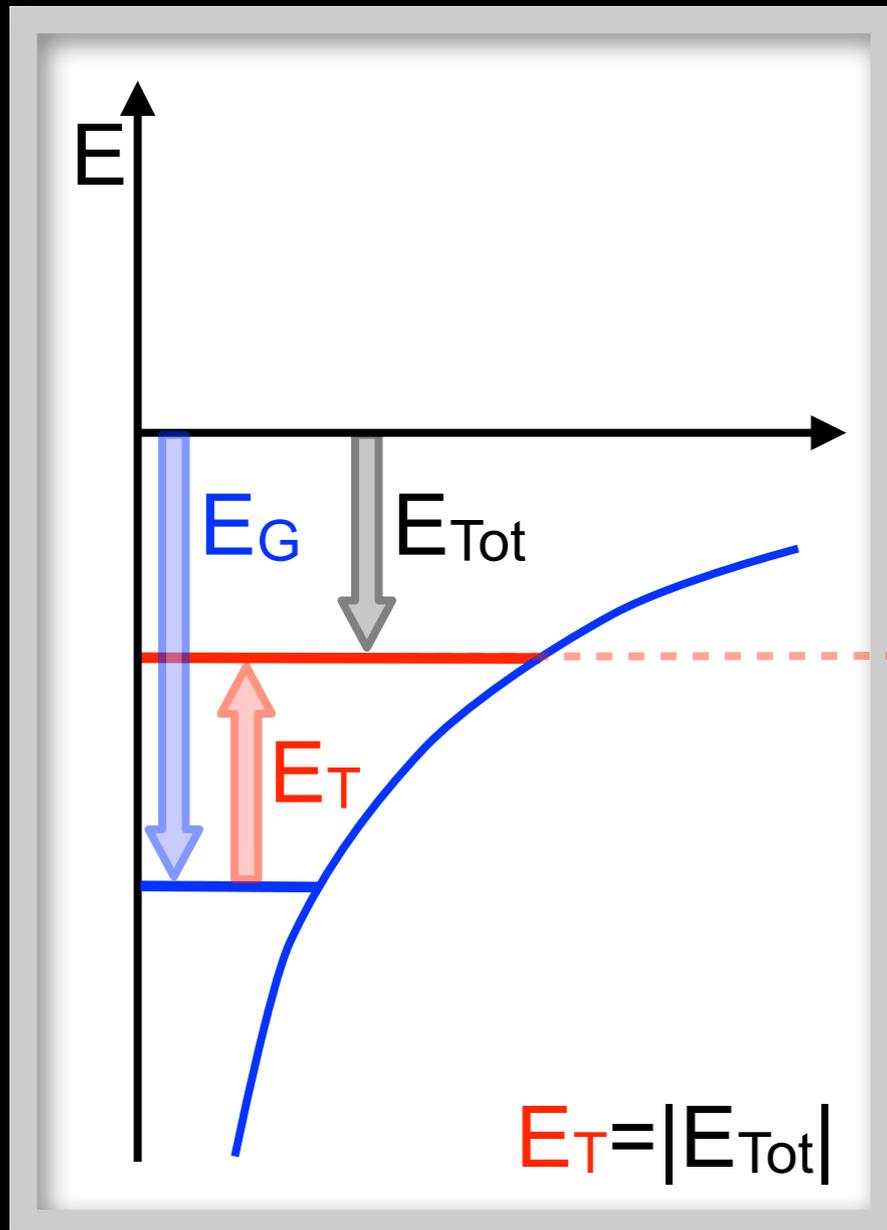
Energía Total:

$$E_{\text{Tot}} = E_G + E_T$$

$$= \frac{1}{2}E_G = -E_T$$



Energía Total



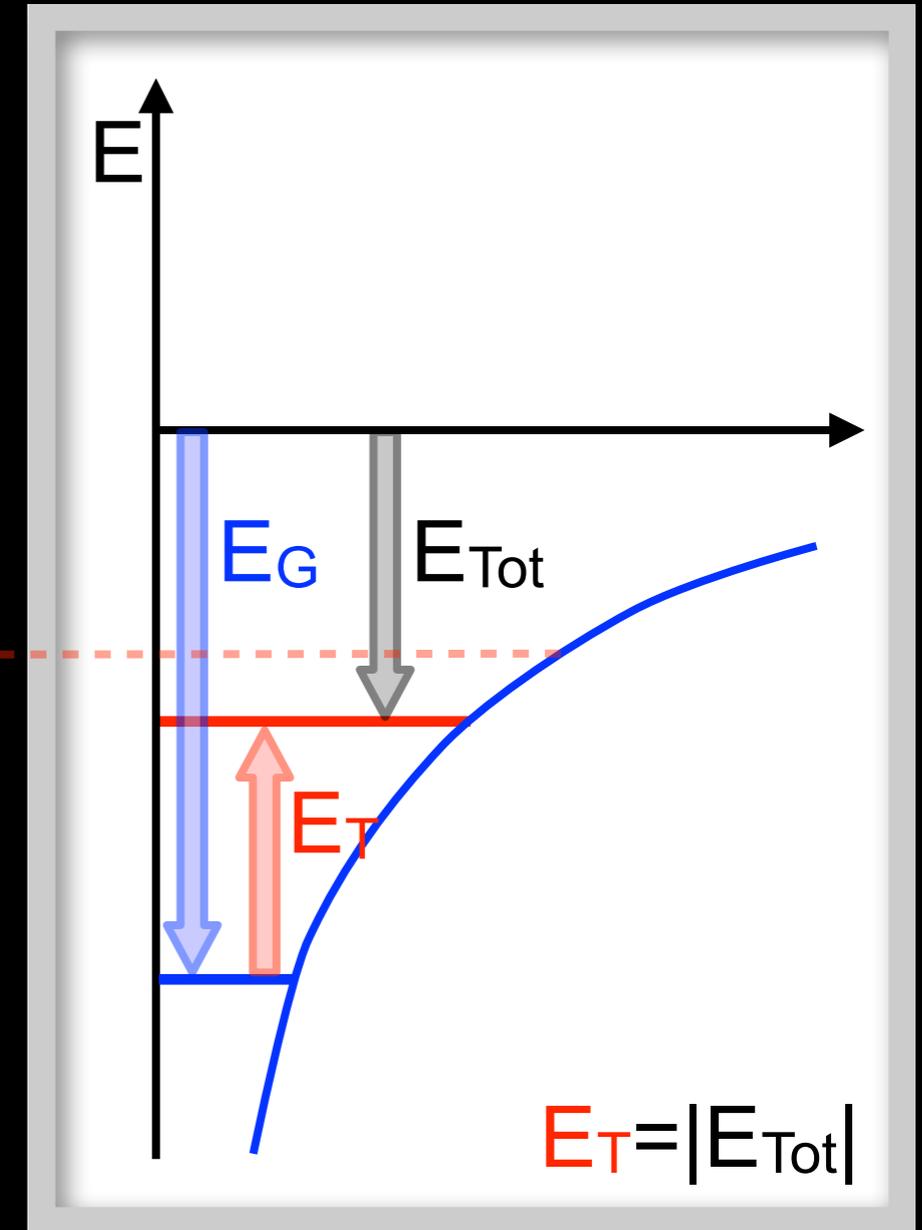
$$\frac{d}{dt} E_{Tot} = -L$$

Al perder energía
 E_{Tot} disminuye

$\Rightarrow |E_{Tot}|$ crece

$\Rightarrow E_T$ crece

\Rightarrow ¡ La estrella
se calienta !



¡ Una estrella se comporta como si tuviera un calor específico negativo !

El Tiempo de Kelvin-Helmoltz

$$\tau_T \equiv \tau_{KH} = \frac{E_G}{L} \sim \frac{E_T}{L} \quad \text{o sea:}$$

$$\tau_{KH} \simeq \frac{GM^2}{RL}$$

es el tiempo que podría brillar la estrella usando solamente su energía térmica/gravitacional

Para el Sol: $\tau_{KH} \sim 30$ millones de años

El sistema solar, y el Sol, es mucho mas viejo que esto:
el Sol (y las estrellas en general) tiene otra fuente de
energía aparte de la térmica y/o gravitacional:
ENERGÍA NUCLEAR

Conservación de Energía Local y Transporte de Energía

Conservación de Energía

$L(r)$ = energía que entra por seg.

$L(r+dr)$ = energía que sale por seg.

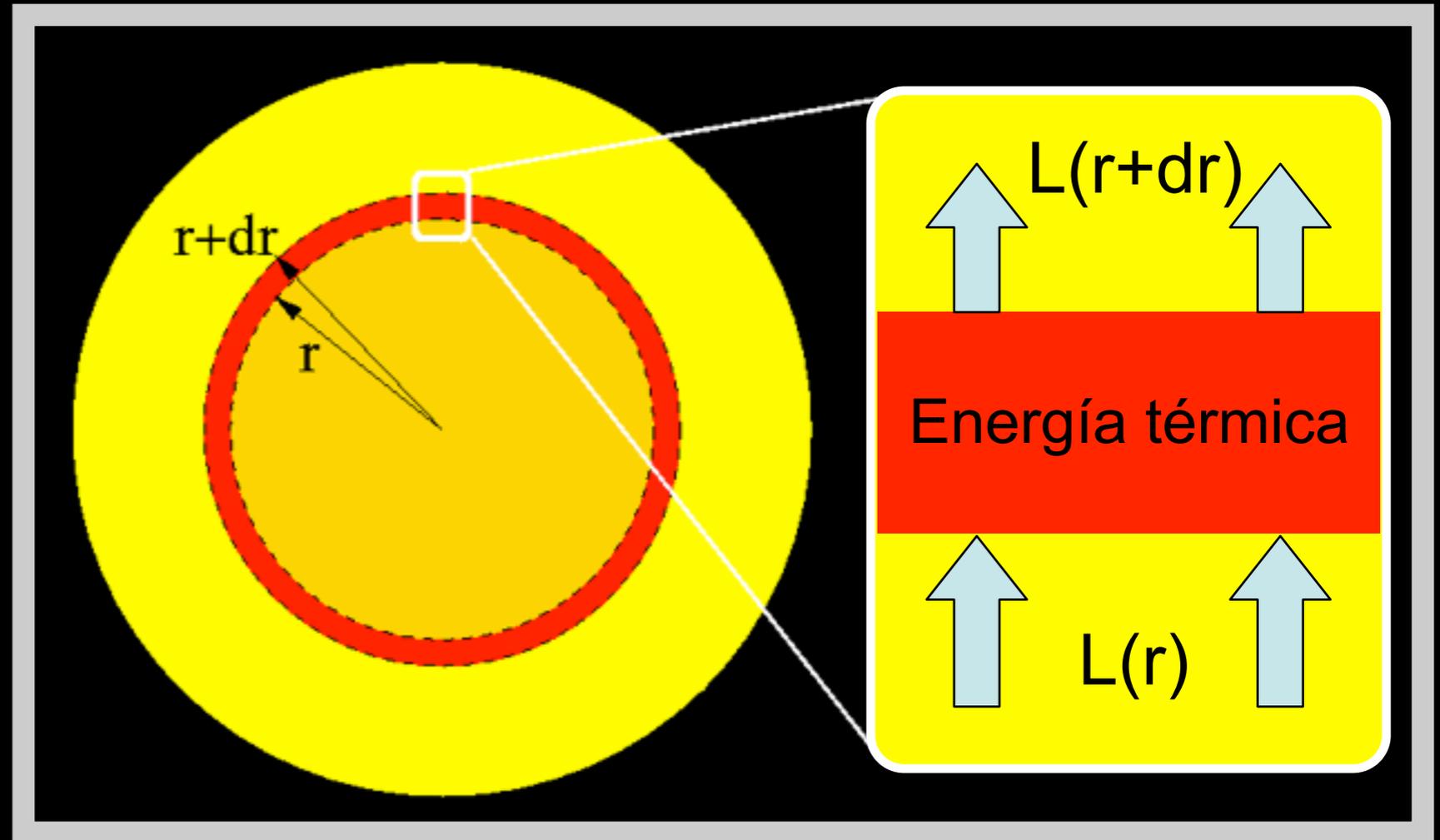
$L(r) - L(r+dr)$ = energía que se acumula por seg.

$$= \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dT} \frac{dT}{dt}$$

$$= C_v \frac{dT}{dt}$$

$$C_v = c_v 4\pi r^2 dr$$

$$L(r+dr) - L(r) = \frac{dL}{dr} dr$$



$$\frac{dL}{dr} = -4\pi r^2 c_v \frac{dT}{dt}$$

Conservación de Energía

Transporte de Calor: Conductividad Térmica

Ley de Fick:

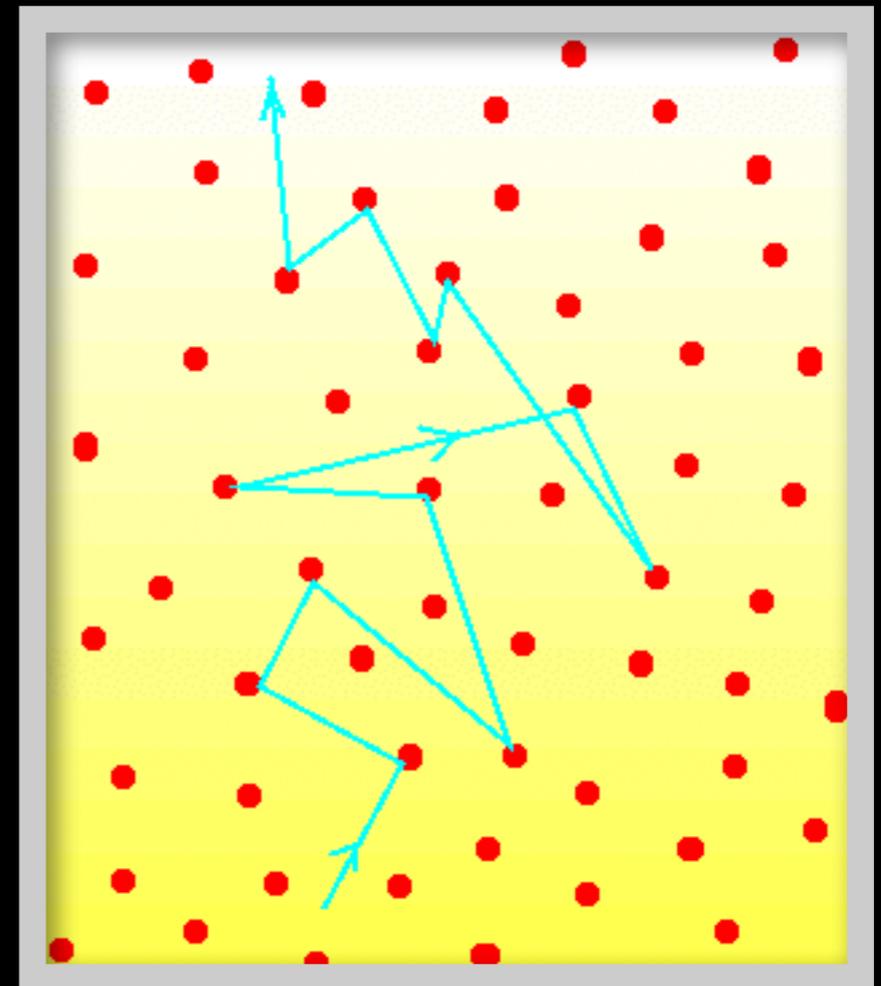
$$\frac{L}{4\pi r^2} = F = -K \frac{dT}{dr}$$

F = flujo de calor (erg/cm²/s)

K = conductividad térmica

Los astrónomos usan
también la opacidad κ

$$\kappa = \frac{4acT^3}{3K\rho}$$



El Tiempo Térmico (Kelvin-Helmoltz)

$$L = -4\pi r^2 K \frac{dT}{dr} \quad \text{y} \quad \frac{dT}{dr} \approx -\frac{T}{R} \quad \text{dan} \quad L \approx 4\pi R \bar{K} T$$

$$\frac{dL}{dr} = -4\pi r^2 c_v \frac{dT}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dL}{dr} \approx \frac{L}{R} \quad \text{dan} \quad L \approx 4\pi R^3 \bar{c}_v \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} \approx \frac{T}{\tau_T} \quad \text{nos da}$$

$$\tau_T \approx \frac{\bar{c}_v}{\bar{K}} R^2$$

Tiempo Térmico:
tiempo para que ocurra un cambio significativo de T

También podemos escribir:

$$\tau_{KH} \approx \frac{E_T}{L} \approx \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \bar{c}_v T}{4\pi R \bar{K} T} = \frac{1}{3} \frac{\bar{c}_v}{\bar{K}} R^2 \simeq \tau_T$$

$$\tau_T \simeq \tau_{KH} \approx \frac{GM^2}{RL}$$

$$\tau_{\text{hidro}} \approx \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}$$

Tiempo Hidrodinámico:

- Tiempo de cruce de una onda de sonido
- Tiempo para restablecer el equilibrio entre presión y gravedad

$$\tau_T \simeq \tau_{KH} \approx \frac{GM^2}{RL}$$

Tiempo Térmico (Kelvin-Helmholtz):

- Tiempo de vida usando la energía térmica (o gravitacional)
- Tiempo para transportar calor en la estrella

Teorema del Virial:

resulta del equilibrio hidrodinámico y relaciona la energía térmica E_T con la energía gravitacional E_G

$$E_G = -\alpha \frac{GM^2}{R}$$

con $\alpha \approx 1$

$$E_T = -\frac{1}{2} E_G$$

La ECUACIÓN de ESTADO:

$$P = P(\rho, T)$$

El Gas Ideal

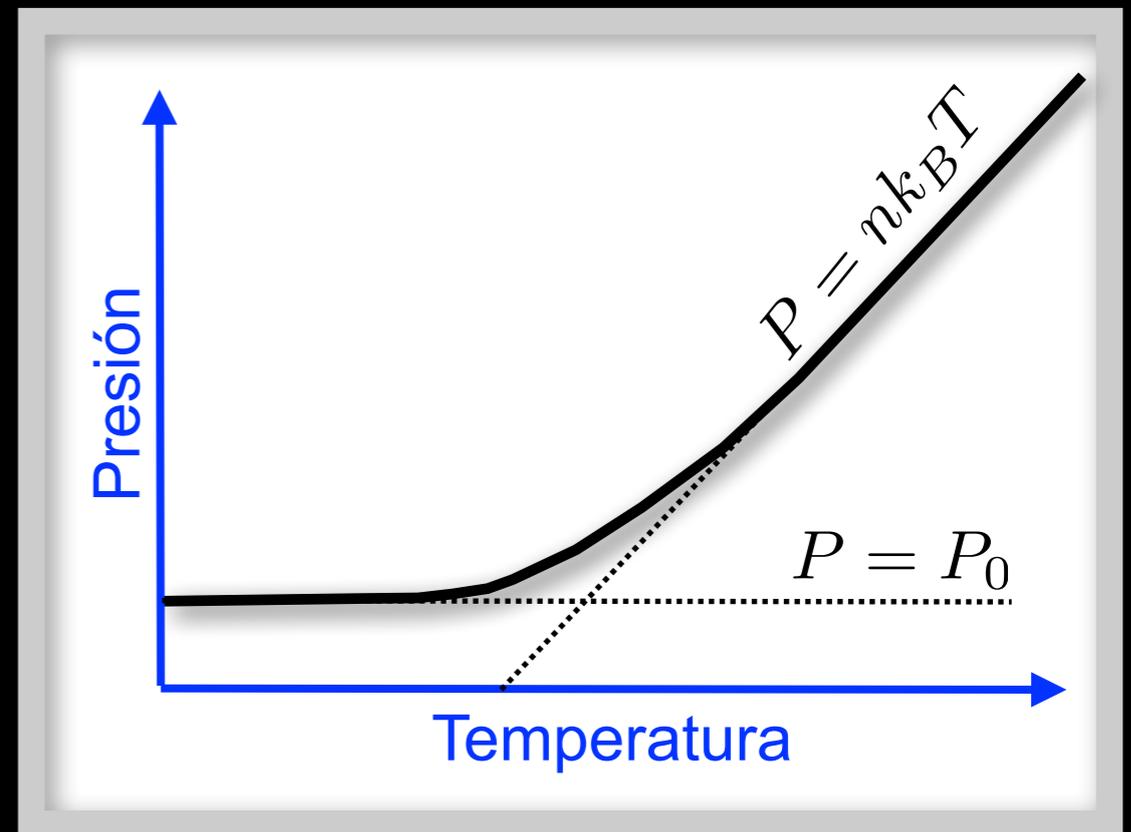
En muchos casos la materia estelar se comporta como un gas ideal

$$PV = N\mathcal{R}T \quad \text{o, mejor} \quad P = nk_B T$$

donde $\mathcal{R} \equiv \mathcal{N}_A k_B$

A altas densidades (y no “muy” altas temperaturas), cuando las partículas casi se enciman, la presión está determinada por el principio de exclusión de Pauli:

P es constante
(ya no depende de T)



El Gas Ideal

En muchos casos la materia estelar
se comporta como un gas ideal

$$PV = N\mathcal{R}T \quad \text{o, mejor} \quad P = nk_B T$$

donde $\mathcal{R} \equiv \mathcal{N}_A k_B$ $\mathcal{N}_A = 6.022 \times 10^{23}$ partículas por mole

Peso “molecular” promedio: $\rho = \mu m_u \cdot n$ $m_u = \frac{1}{\mathcal{N}_A} = 1.66 \times 10^{-24}$ gm

μ es la masa promedio de una partícula, medida en unidad de la masa atómica (\approx masa del protón \approx masa del neutrón)

ρ = densidad de masa (gm/cm³) n = densidad numérica de partículas (#/cm³)

$$P = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T$$

El Gas Ideal

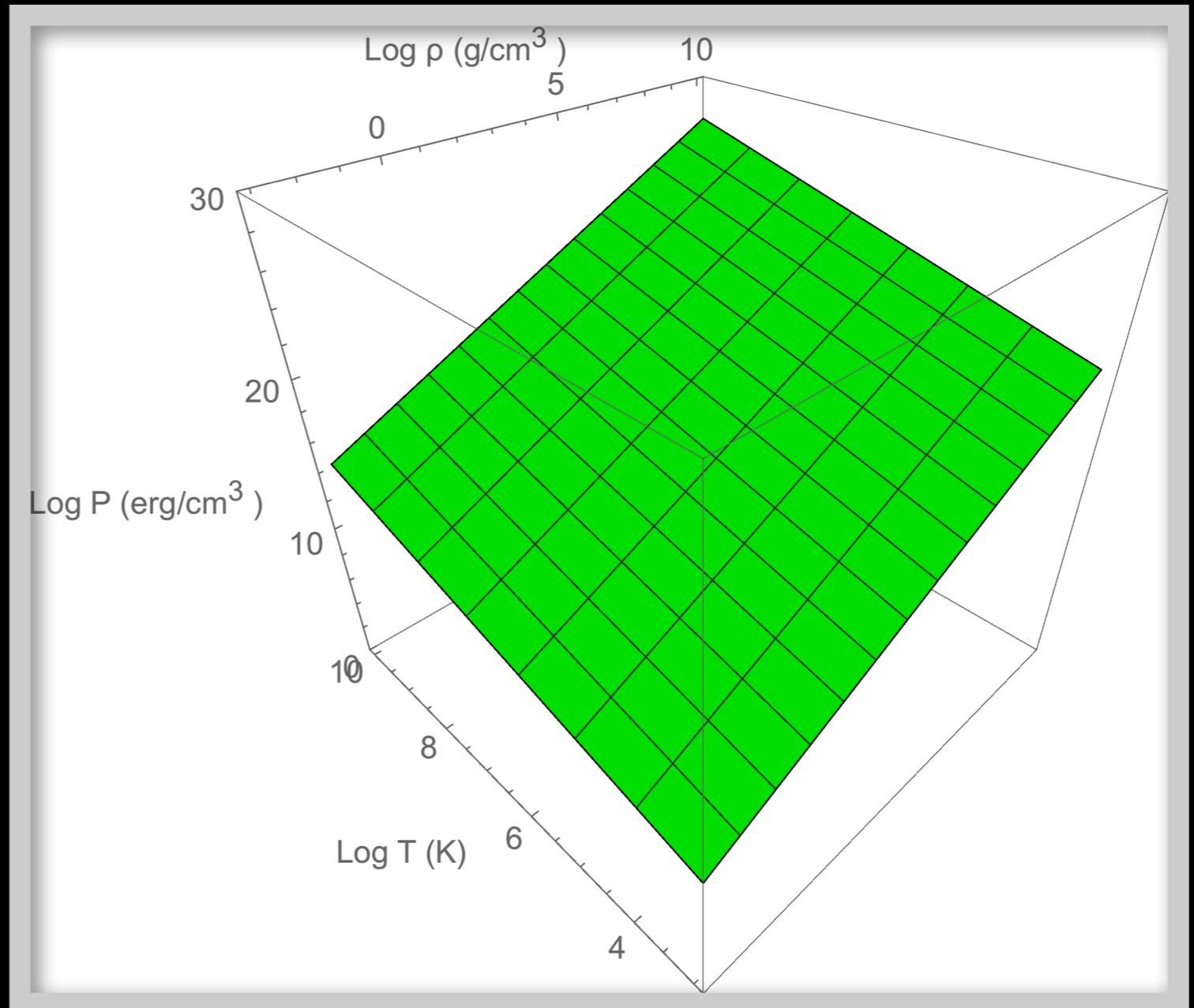
Condiciones de validez:

1) La energía solo tiene contribución de la energía cinética:

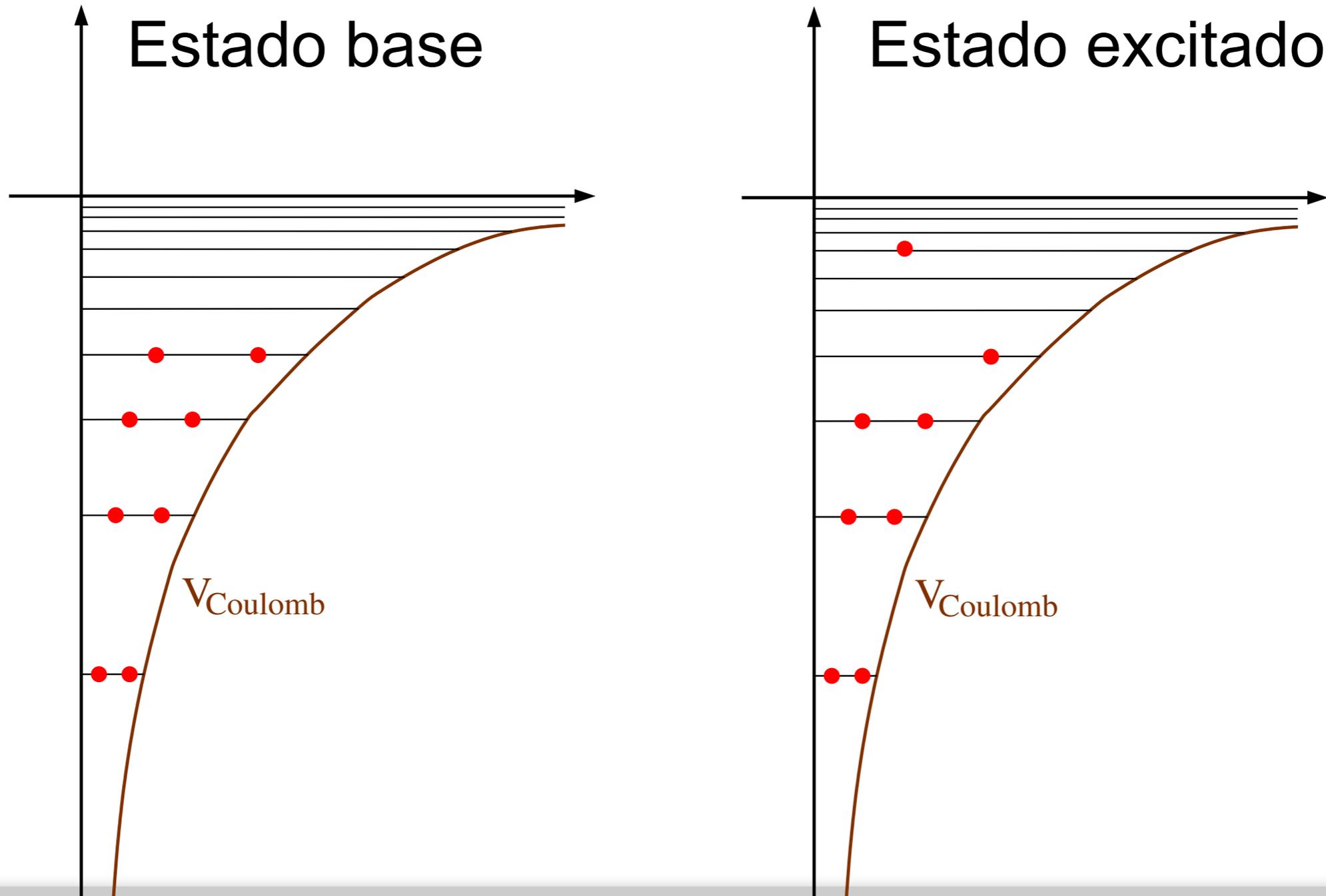
$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

(Las interacciones son despreciables)

2) Los efectos cuánticos (princ. de Pauli) son despreciables



Ocupación Energética en un Átomo



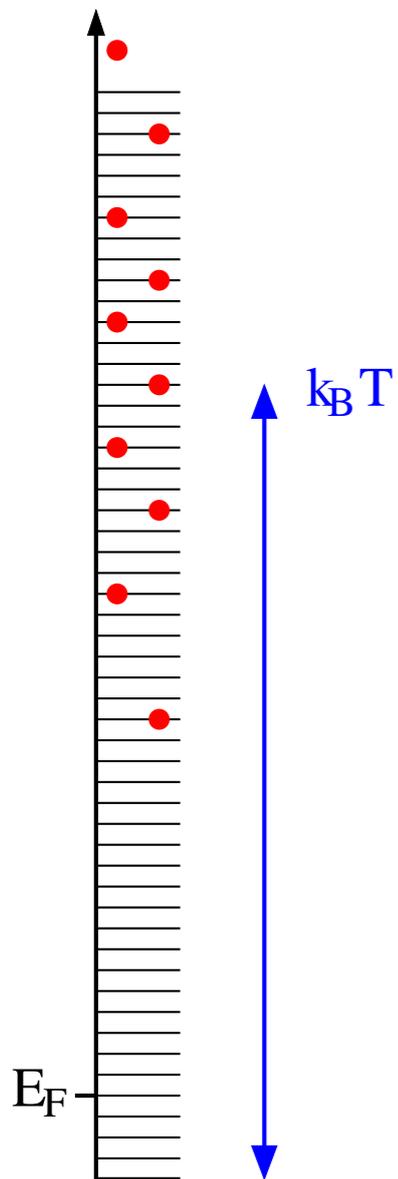
Ocupación Energética en un Gas

100% clásico

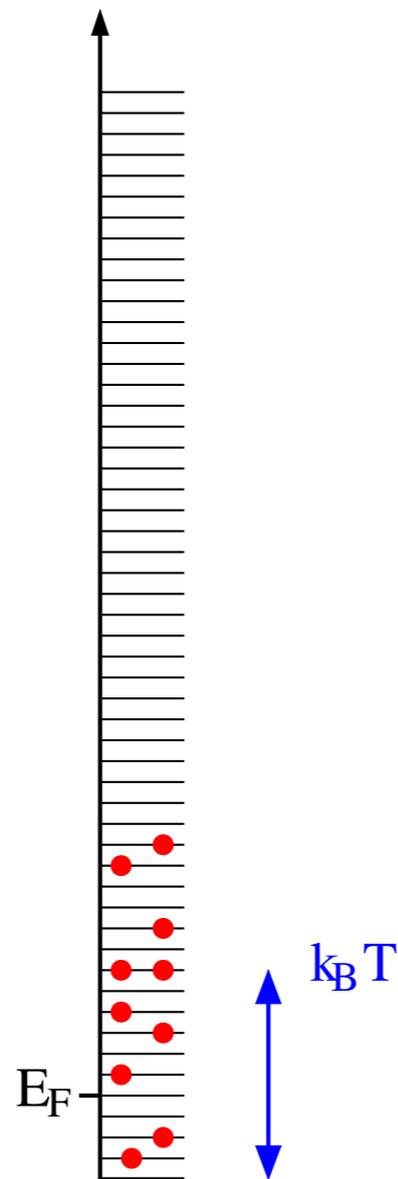


100% cuántico

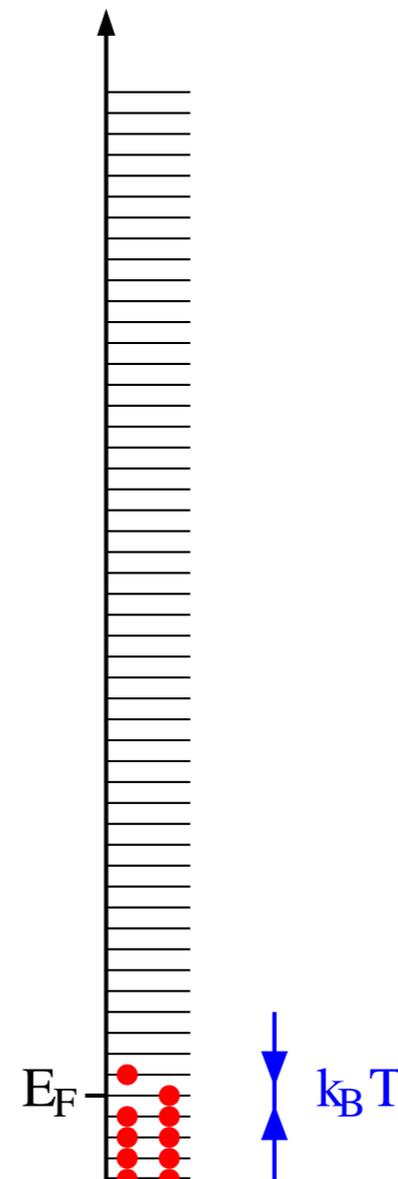
$k_B T \gg E_F$



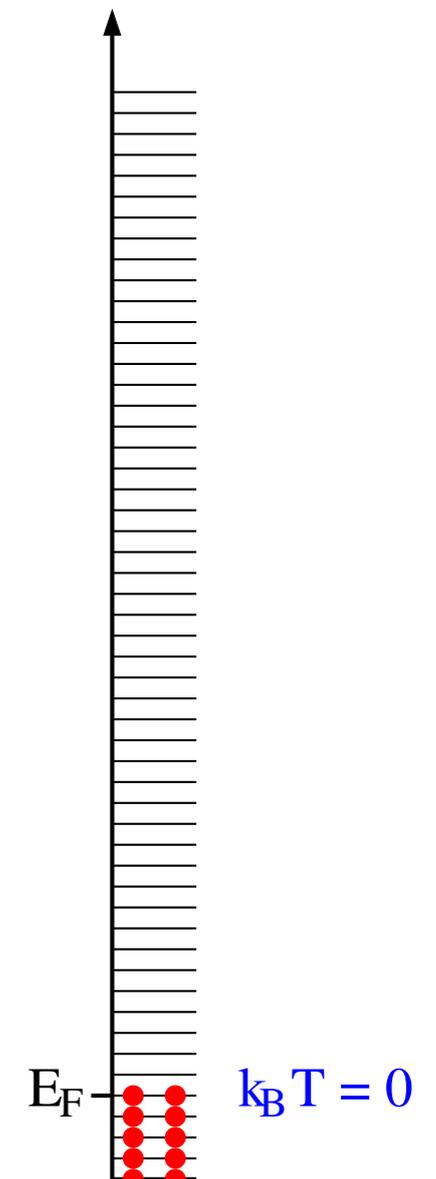
$k_B T \sim E_F$



$k_B T \ll E_F$



$k_B T = 0$



Ocupación máxima $n_{max}(p)$

Principio de Incertidumbre de Heisenberg $\delta x \cdot \delta p \geq h = 2\pi\hbar$

Debido a que las partículas se describen con funciones de onda.

Pongamos partículas en una caja de longitud $L = \delta x$:

cada función de onda de momento p ocupa un espacio en momento: $\delta p = \frac{2\pi\hbar}{\delta x} = \frac{2\pi\hbar}{L}$

En un rango Δp el número de funciones de onda posibles es $\Delta N = \frac{\Delta p}{\delta p} = \frac{L \Delta p}{2\pi\hbar}$

En un volumen $V=L^3$ el número de funciones de onda posibles es $\Delta N = V \frac{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z}{(2\pi\hbar)^3}$

y en una capa de volumen $4\pi p^2 dp$: $dN = V \frac{p^2 dp}{2\pi^2 \hbar^3}$

Principio de Exclusión de Pauli
 \Rightarrow número máximo de partículas:

$$dn_{max} = \frac{p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3}$$

Se agrega un factor 2 por el espín

Gas Ideal y Principio de Pauli

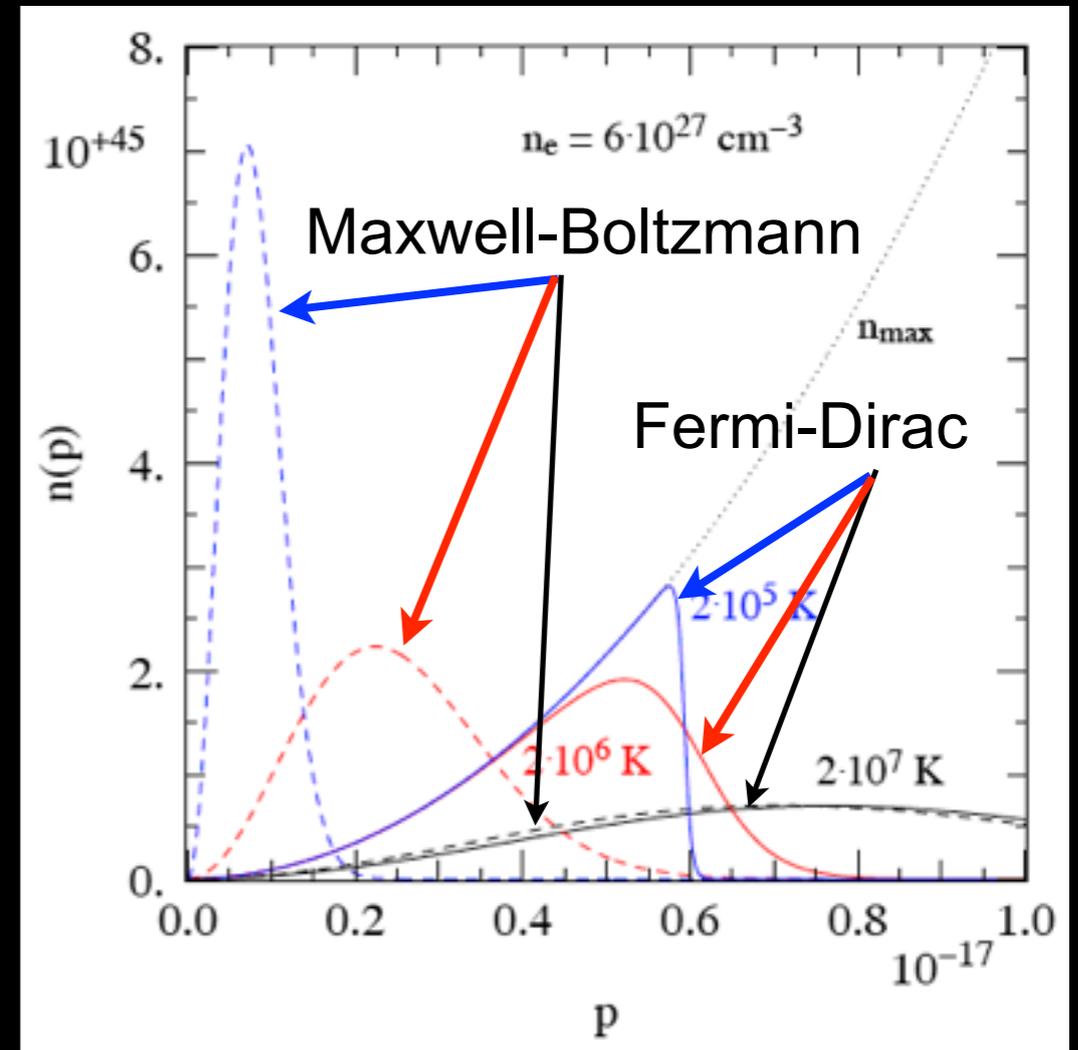
Distribución de Maxwell-Boltzmann:
(gas ideal = gas perfecto clásico)

$$n(p)dp = \frac{n}{(2\pi mk_B T)^{3/2}} e^{-p^2/2mk_B T} 4\pi p^2 dp$$

Distribución máxima por Pauli:
(gas perfecto cuántico)

$$n_{\max}(p)dp = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p^2 dp$$

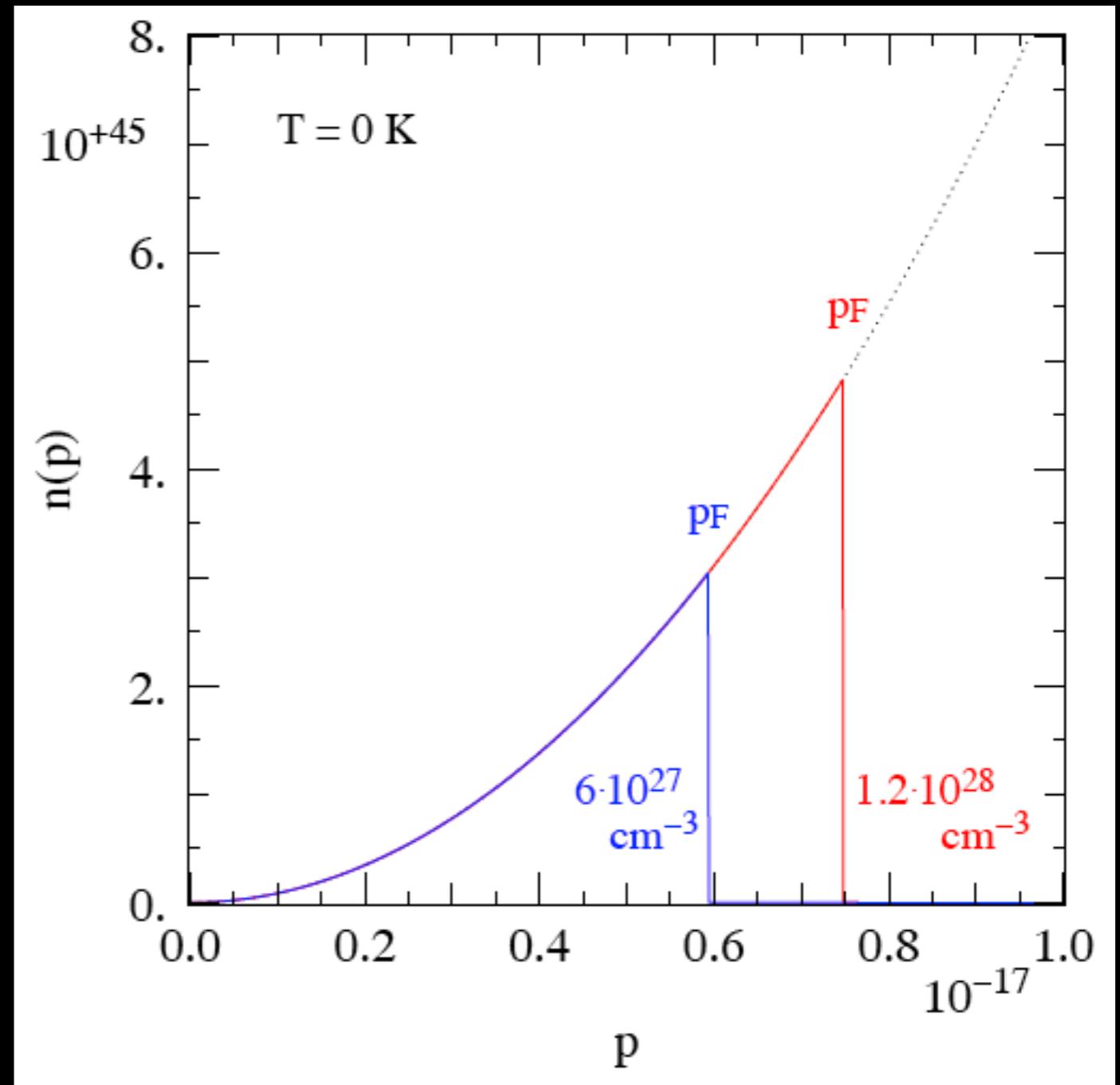
La función de distribución cuántica completa es la de **Fermi-Dirac**



Fermi-Dirac siempre
está inferior a n_{\max}

Gas de Fermi-Dirac Degenerado

Distribución de las partículas en momento en $T = 0$ bajo el regimen cuántico



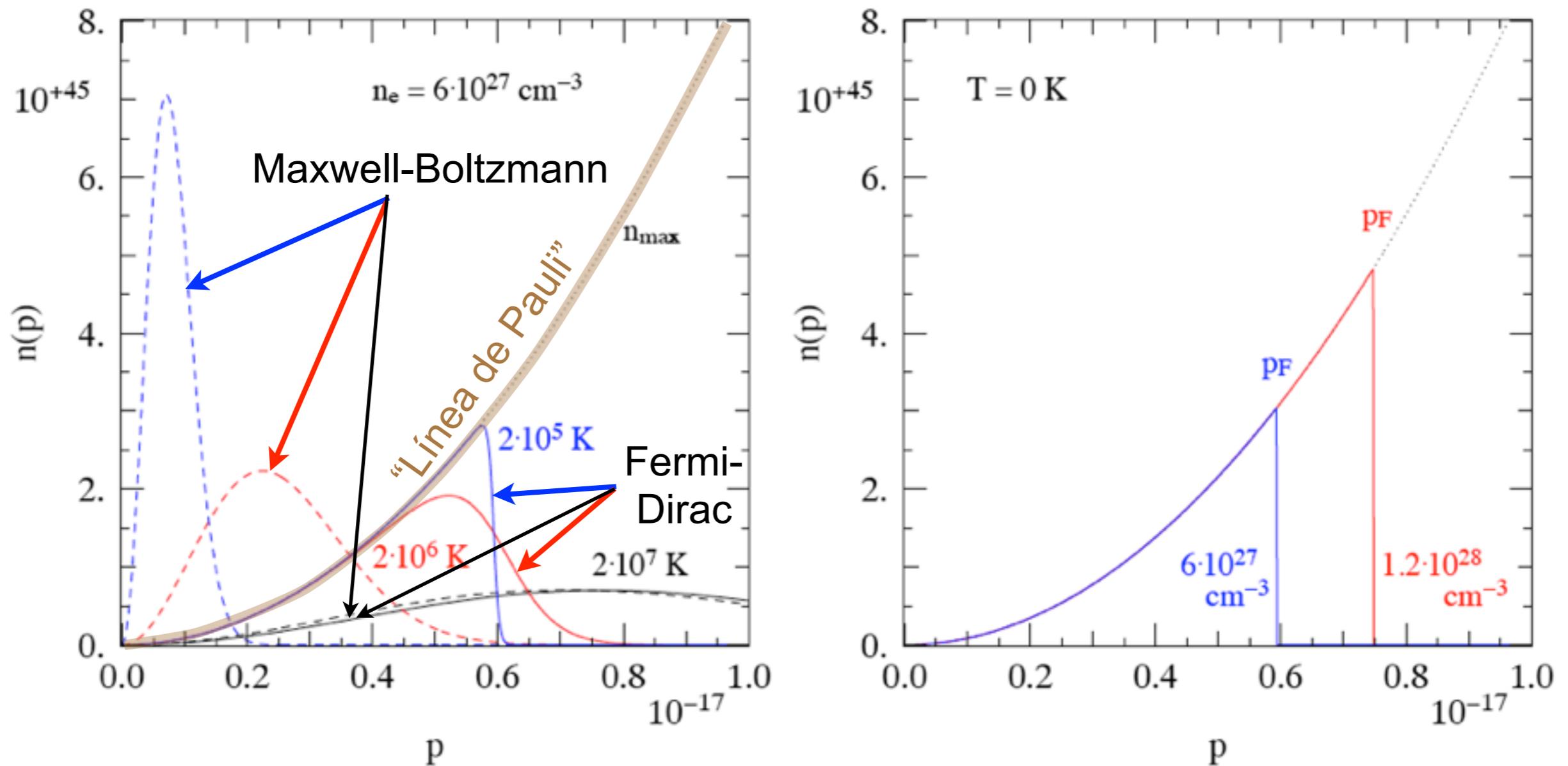
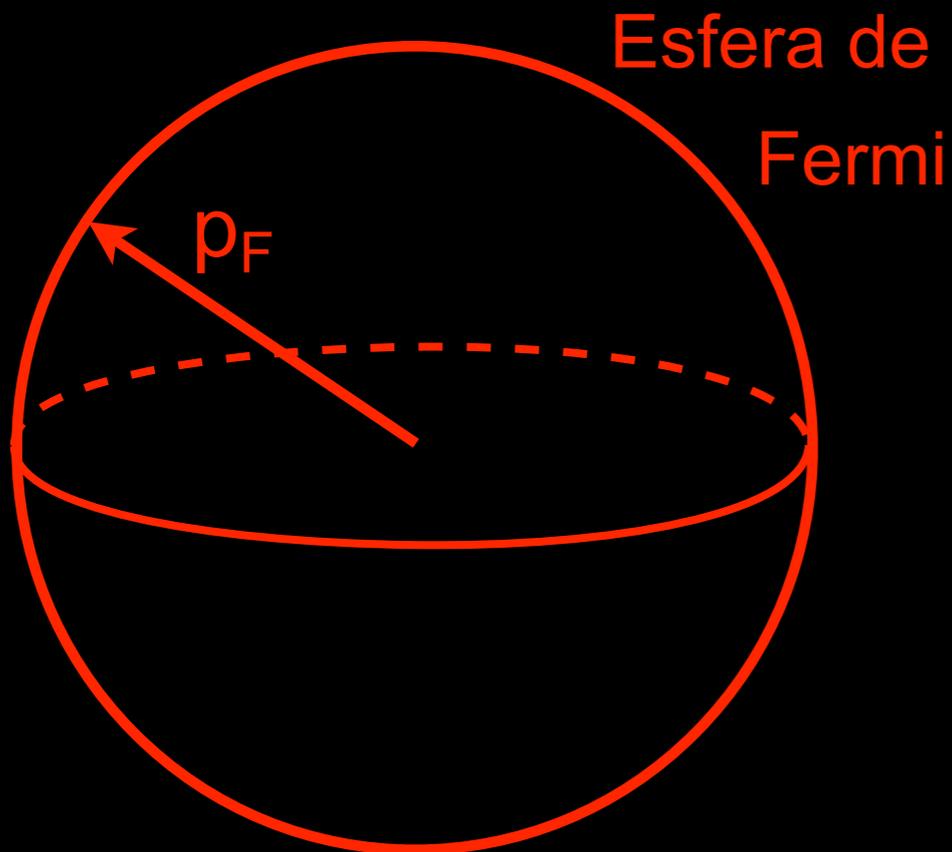


Figure 3.2. *Left:* Electron momentum distributions $n(p)$ for an electron density of $n_e = 6 \times 10^{27} \text{ cm}^{-3}$ (corresponding to $\rho = 2 \times 10^4 \text{ g/cm}^{-3}$ if $\mu_e = 2$), and for three different temperatures: $T = 2 \times 10^7 \text{ K}$ (black lines), $2 \times 10^6 \text{ K}$ (red lines) and $2 \times 10^5 \text{ K}$ (blue lines). The actual distributions, governed by quantum mechanics, are shown as solid lines while the Maxwell-Boltzmann distributions for the same n_e and T values are shown as dashed lines. The dotted line n_{max} is the maximum possible number distribution if all quantum states with momentum p are occupied. *Right:* Distributions in the limit $T = 0$, when all lowest available momenta are fully occupied. The blue line is for the same density as in the left panel, while the red line is for a density two times as high.

Gas Degenerado: Esfera, momento, y energía de Fermi



p_F = momento de Fermi

Energy at p_F = E_F = Fermi energy

Número total de partículas
en la esfera de Fermi

$$n = \int_0^{p_f} n_{\max} dp = \int_0^{p_f} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p^2 dp$$

$$n = \frac{p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}$$

Esto nos da la relación entre
la densidad de partículas n y
el radio p_F de la esfera de Fermi

Un Poco de Termodinámica

Primera ley de la termodinámica: $dU = T dS - P dV + \mu dN$

U = energía interna de un sistema con N partículas en un volumen V : $U = U(S, V, N)$

$U = Ve$ donde e = energía interna por unidad de volumen: $e = e(s, n)$

S = entropía = Vs donde s = entropía por unidad de volumen

Potencial químico: $\mu \equiv \left. \frac{\partial U}{\partial N} \right|_{S, V}$ Densidad de partículas: $n = \frac{N}{V}$

$$\text{Presión: } P = - \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{S, N} = n \left. \frac{\partial e}{\partial n} \right|_s - e$$

$$\text{Prueba: } P = - \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{S, N} = - \left. \frac{\partial Ve}{\partial V} \right|_{S, N} = -e - V \left. \frac{\partial e}{\partial V} \right|_{S, N} = -e - V \left. \frac{\partial n}{\partial V} \right|_{S, N} \left. \frac{\partial e}{\partial n} \right|_s = -e - V \left(-\frac{N}{V^2} \right) \left. \frac{\partial e}{\partial n} \right|_s = n \left. \frac{\partial e}{\partial n} \right|_s - e$$

Gas degenerado de electrones: no-relativista vs relativista

Energías en la esfera de Fermi:

Gas no relativista: si $p_F \ll m_e c$: $E = \frac{p^2}{2m_e}$ y $E_F = \frac{p_F^2}{2m_e}$

$$e = \int_0^{p_f} \frac{p^2}{2m_e} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p^2 dp = \frac{p_F^5}{10m_e\pi^2\hbar^3} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m_e} n_e$$

$$P = K \rho^{5/3}$$

Gas ultra relativista: si $p_F \gg m_e c$: $E = pc$ y $E_F = p_F c$

$$e = \int_0^{p_f} pc \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p^2 dp = \frac{c}{4\pi^2\hbar^3} p_F^4 = \frac{3}{4} p_F c n_e$$

$$P = K \rho^{4/3}$$

Gas de Electrones Completamente Degenerado: $T=0$

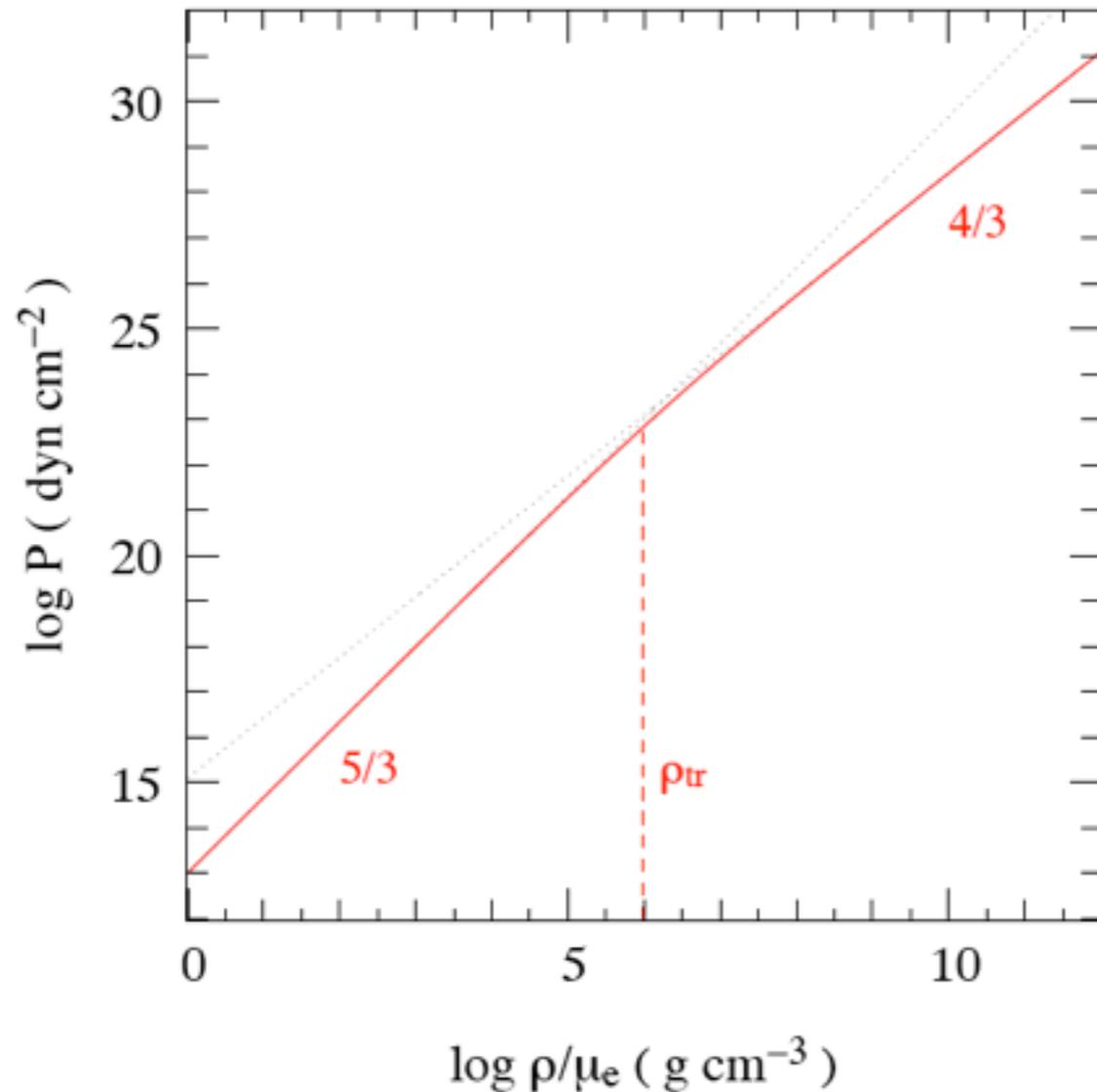
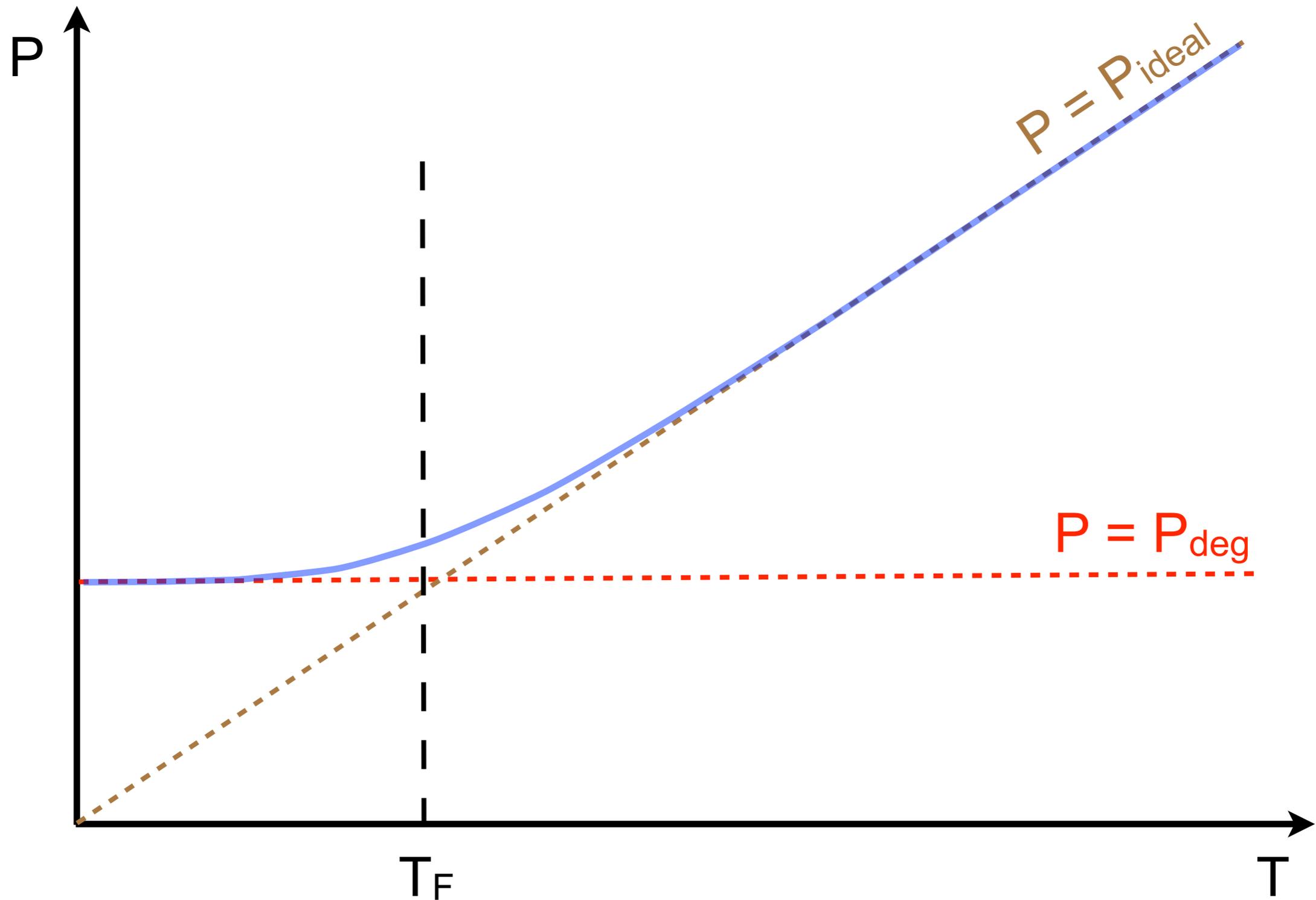
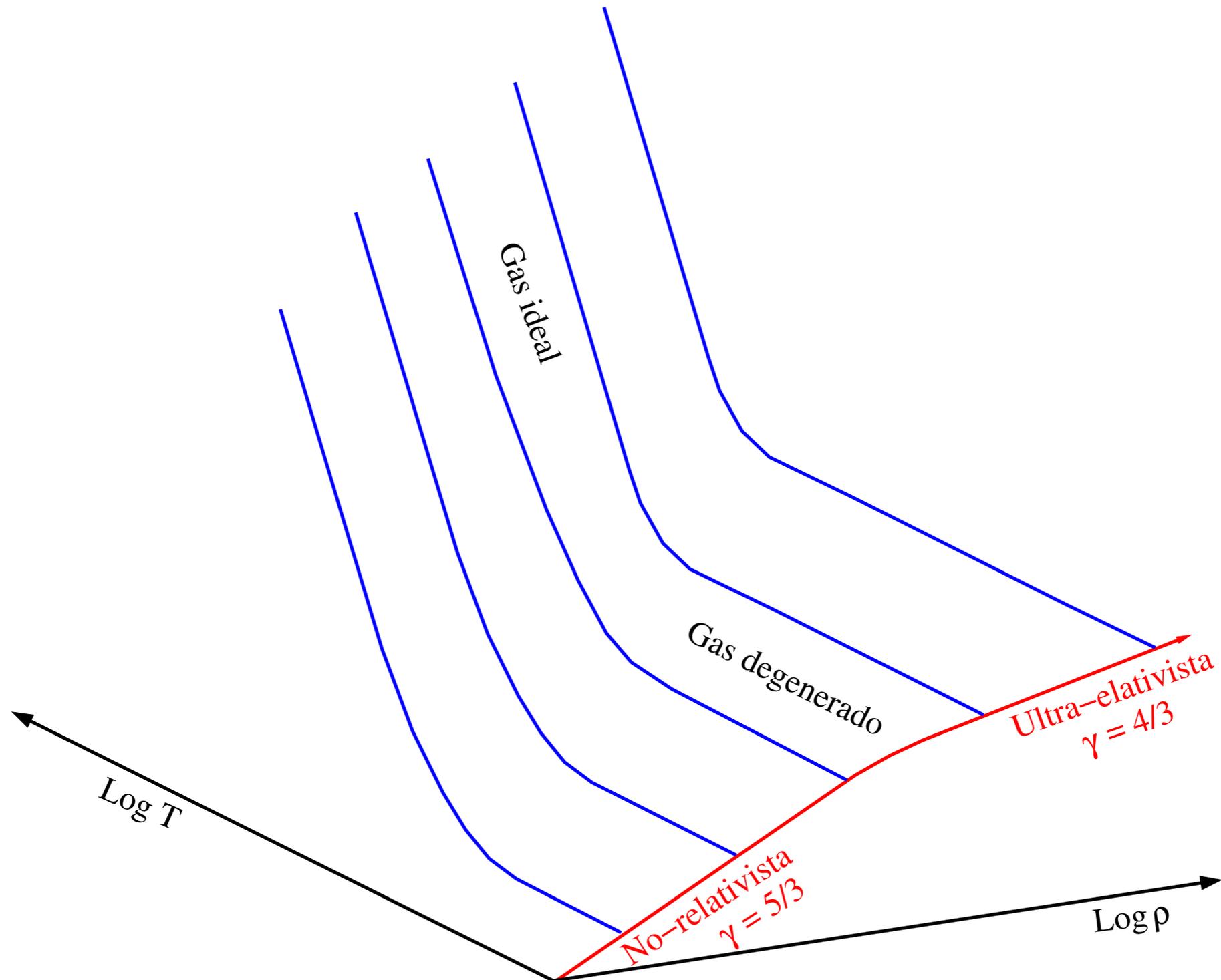


Figure 3.3. The equation of state for completely degenerate electrons. The slope of the $\log P$ - $\log \rho$ relation changes from $5/3$ at relatively low densities, where the electrons are non-relativistic, to $4/3$ at high density when the electrons are extremely relativistic. The transition is smooth, but takes place at densities around $\rho_{tr} \approx 10^6 \mu_e \text{ g cm}^{-3}$.

De Gas Degenerado a Gas Ideal



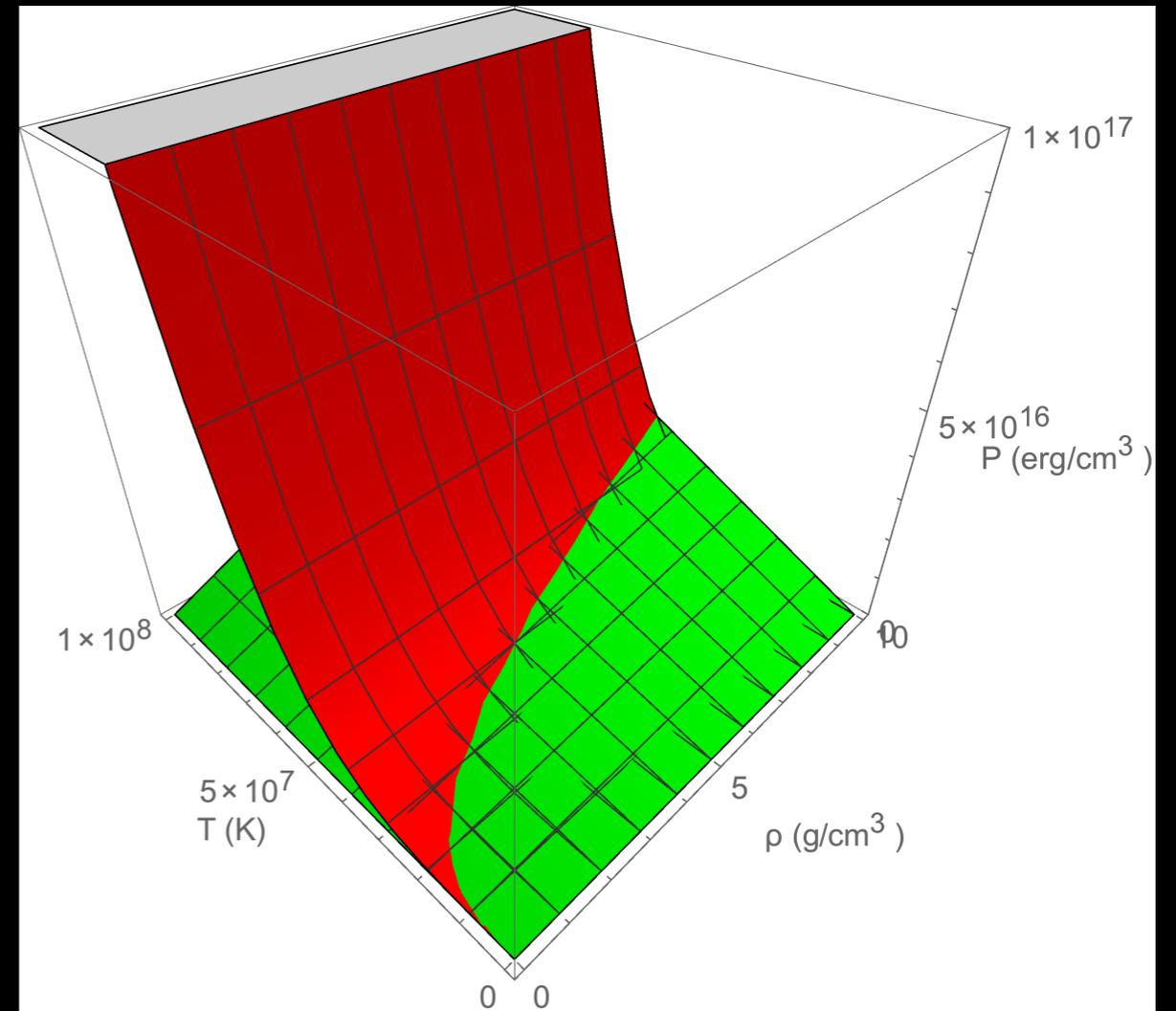
La Ecuación de Estado de Electrones



Presión de Radiación

A muy altas temperaturas y “bajas” densidades la presión de radiación (del gas de fotones) domina sobre la presión de la materia:

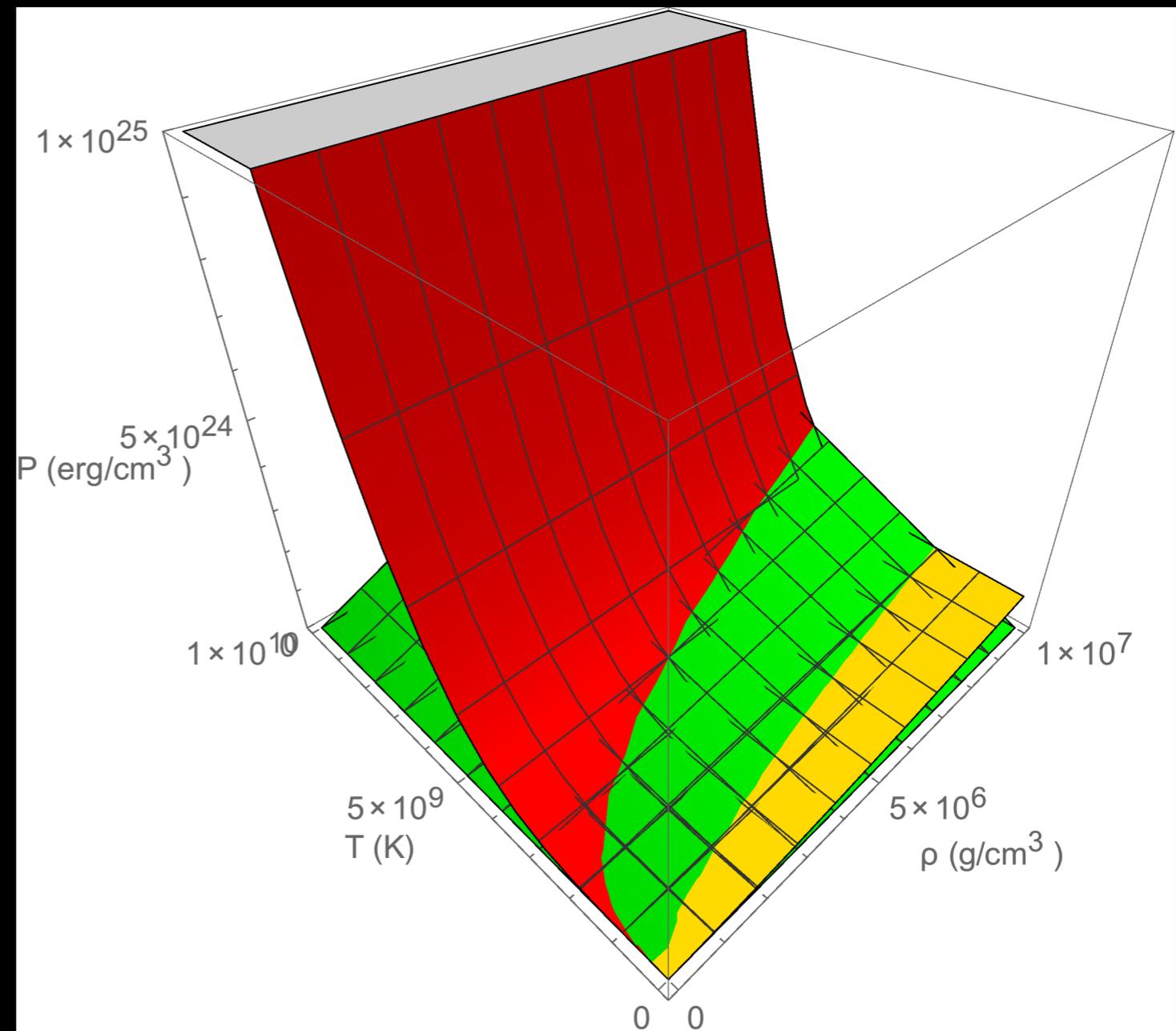
$$P_{\text{rad}} = aT^4$$



P_{rad} versus P_{gas}

Comparación de las Tres Contribuciones

P_{rad} versus
 P_{ideal} versus
 P_{deg}



Ecuación de Estado e Interiores Estelares

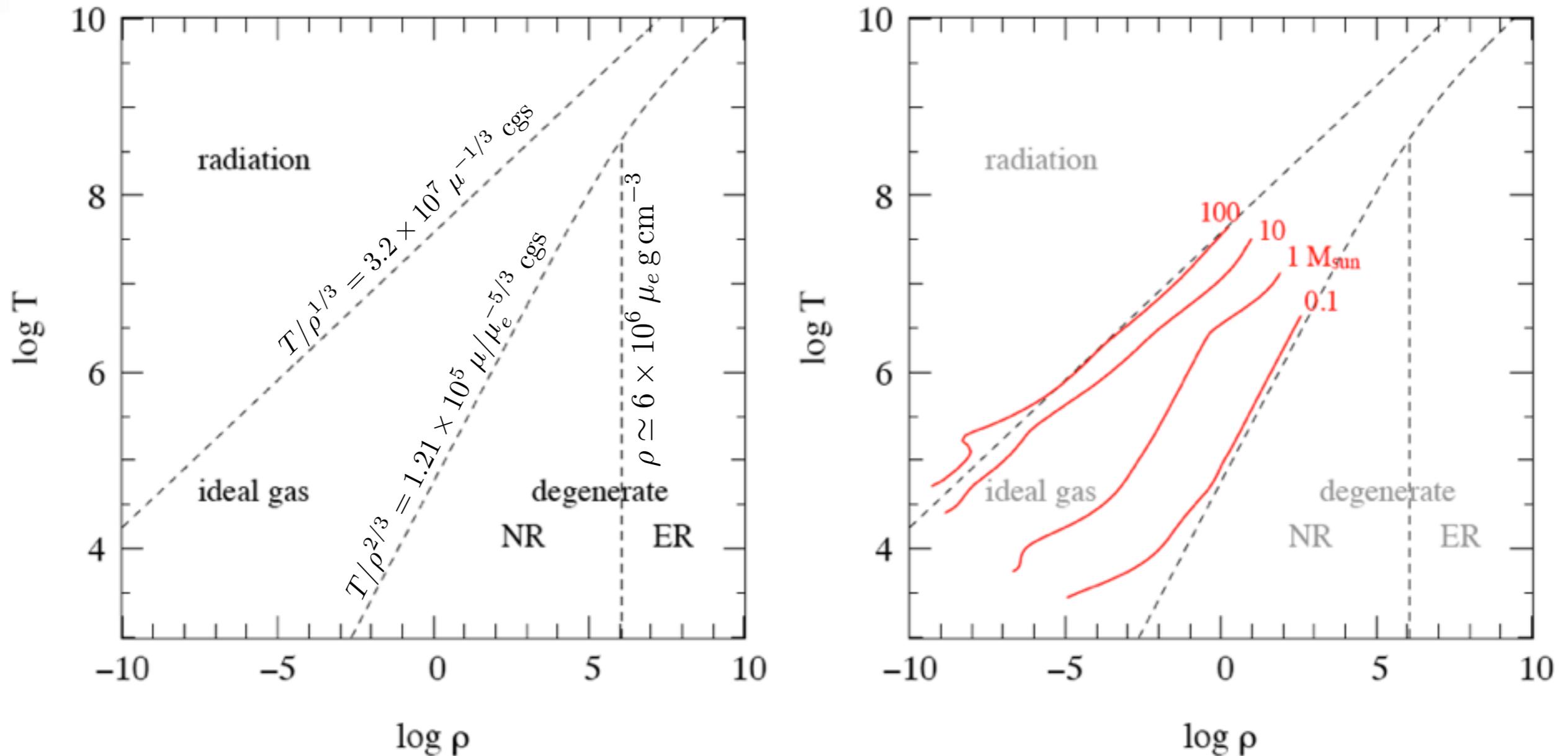


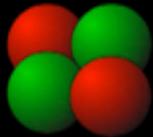
Figure 3.4. *Left:* The equation of state for a gas of free particles in the $\log T$, $\log \rho$ plane. The dashed lines are approximate boundaries between regions where radiation pressure, ideal gas pressure, non-relativistic electron degeneracy and extremely relativistic electron degeneracy dominate, for a composition $X = 0.7$ and $Z = 0.02$. *Right:* Detailed structure models for homogeneous main-sequence stars of $0.1 \dots 100 M_{\odot}$ have been added (solid lines). The $1 M_{\odot}$ model is well within the ideal-gas region of the equation of state. In the $0.1 M_{\odot}$ star electron degeneracy pressure is important, except in the outer layers (at low ρ and T). In stars more massive than $10 M_{\odot}$, radiation pressure becomes important, and it dominates in the surface layers of the $100 M_{\odot}$ model.

ELEMENTOS DE FÍSICA NUCLEAR

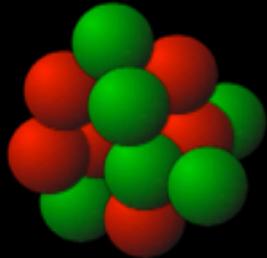
Algunos Núcleos



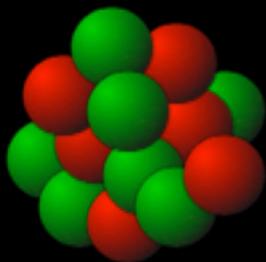
Hidrógeno 1H (1p:0n)



Helio 4He (2p:2n)



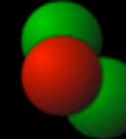
Carbono 12C (6p:6n)



Oxígeno 16O (8p:8n)



Deuterio 2H (1p:1n)



Tritio 3H (1p:2n)



Helio 3He (2p:1n)

Nota:



Protón (carga = +e)



Neutrón (carga= 0)

Partículas

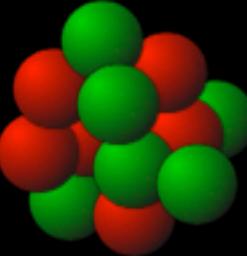
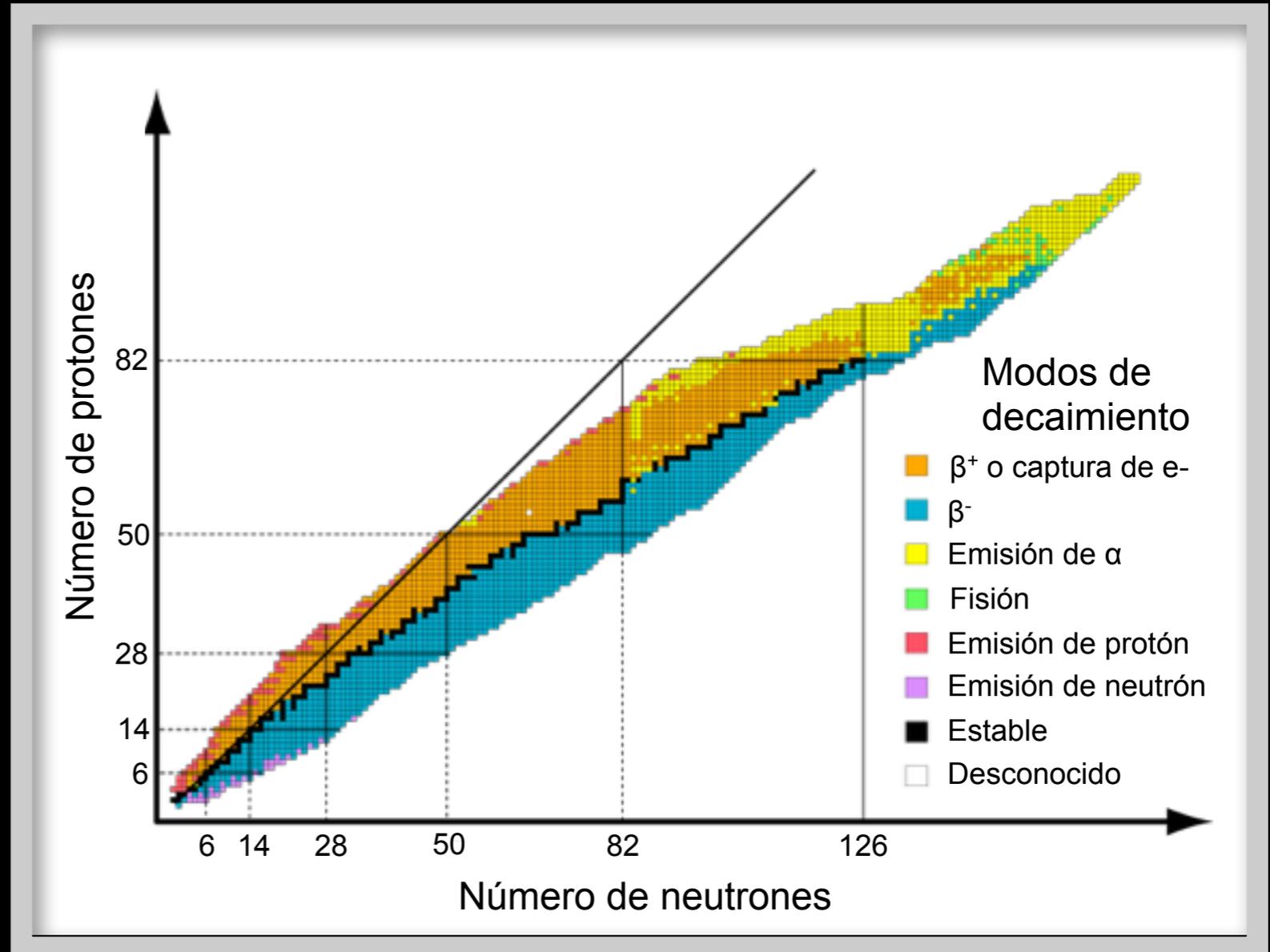
Carga eléctrica Q [en unidad de e]	+1		protón	p	Nucleones	BARIONES	
	0		neutrón	n			
	Z		núcleo	(Z,N)	A=Z+N		
	<hr/>						
	-1		electrón	e ⁻	LEPTONES		
	+1		positrón	e ⁺ (=anti-electrón)			
	0		neutrino	ν			
	0		antineutrino	$\bar{\nu}$			
	<hr/>						
	0		fotón	γ			

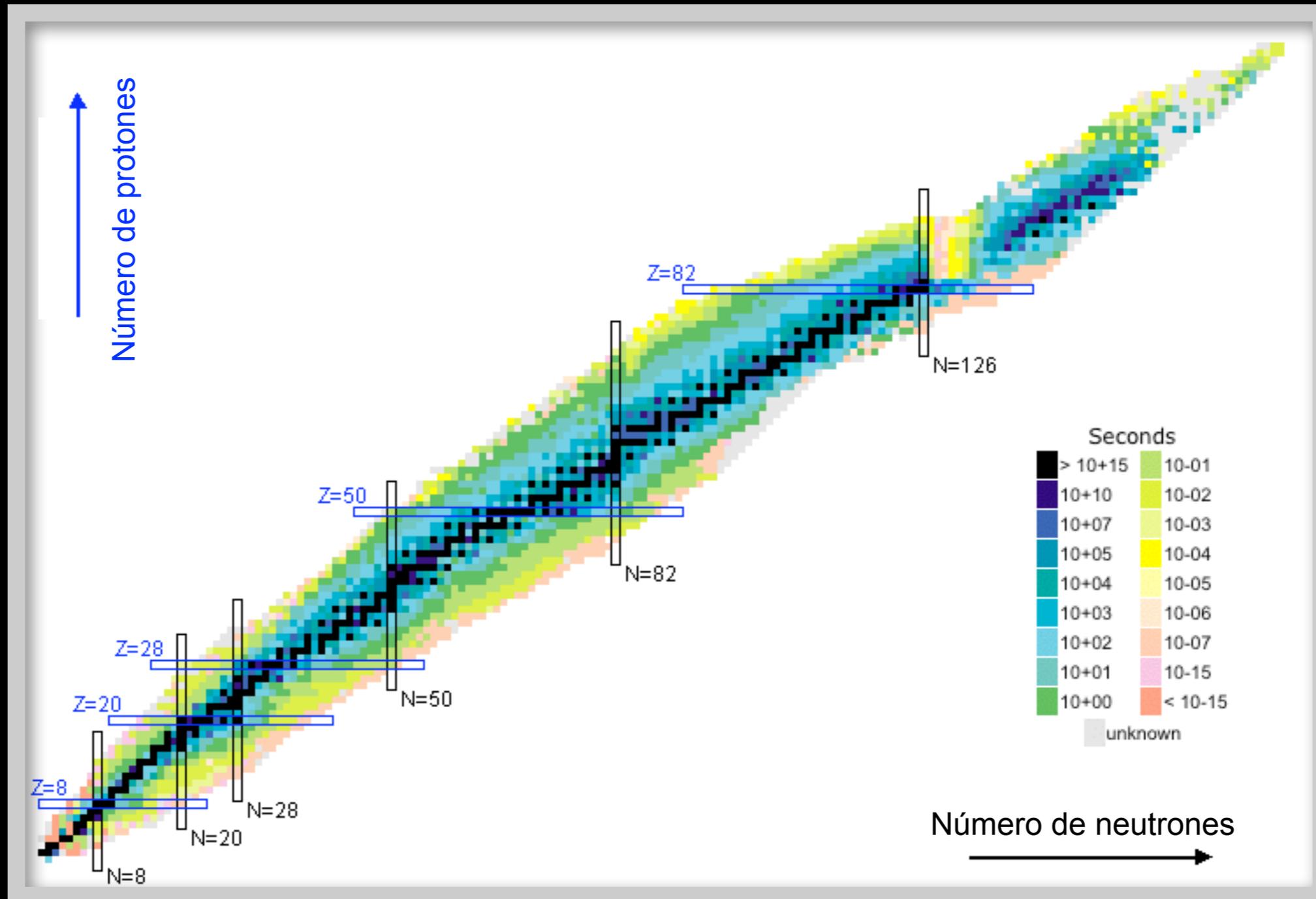
Tabla de Núclidos

De los núcleos conocidos:

- 90 son absolutamente estables
- 165 han de ser inestables pero con vida media tan larga que no se ha podido medir a la fecha.
- 80 elementos tienen varios isótopos estables
- 26 elementos tiene un solo isótopo estable.



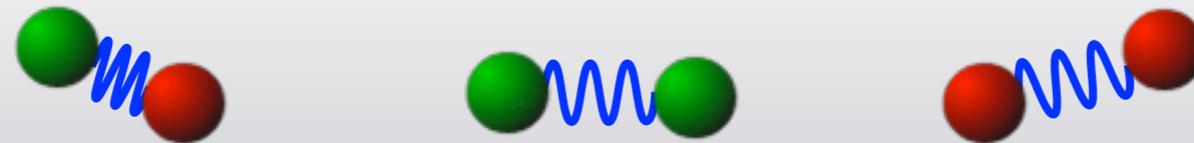
Mapa de Núclidos: vidas medias



Del National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory <http://www.nndc.bnl.gov/chart/>

Fuerza Nuclear y Fuerza Coulombiana

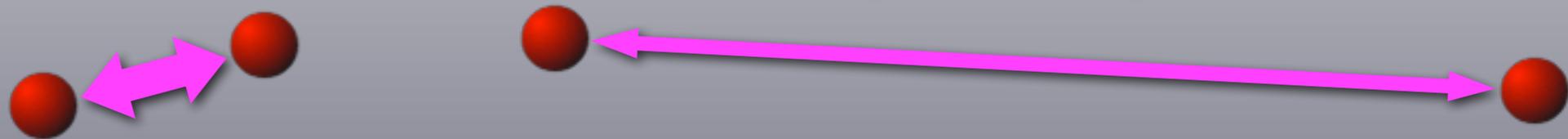
La fuerza nuclear liga los nucleones



La fuerza nuclear sólo actúa a corta distancia (1-2fm)

La atracción n-p es mas fuerte que n-n y p-p

La fuerza coulombiana repela los protones



La fuerza coulombiana actúa a larga distancia ($1/r^2$)
(La fuerza coulombiana *no* actúa sobre los neutrones)

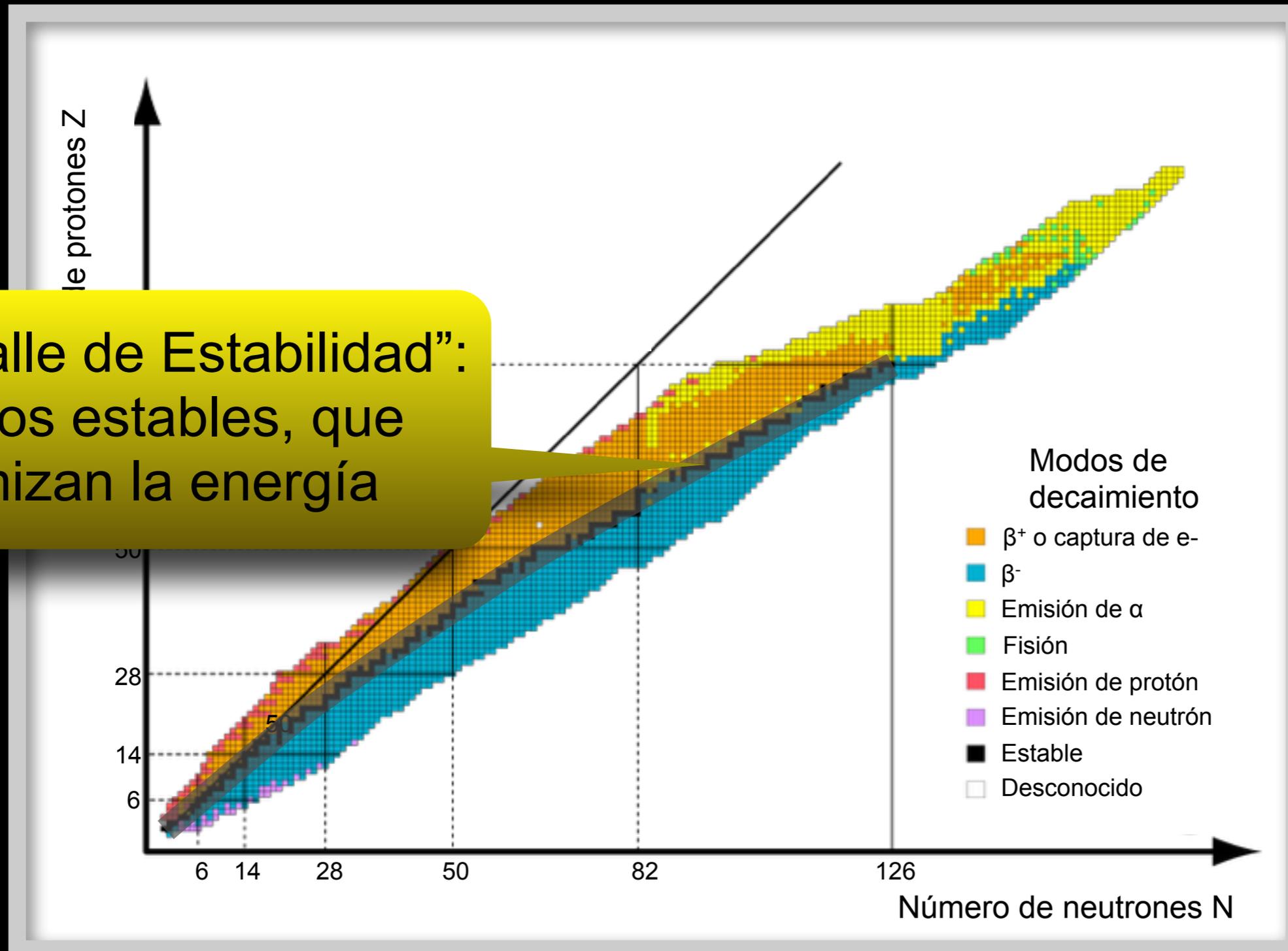


Protón (carga = +e)



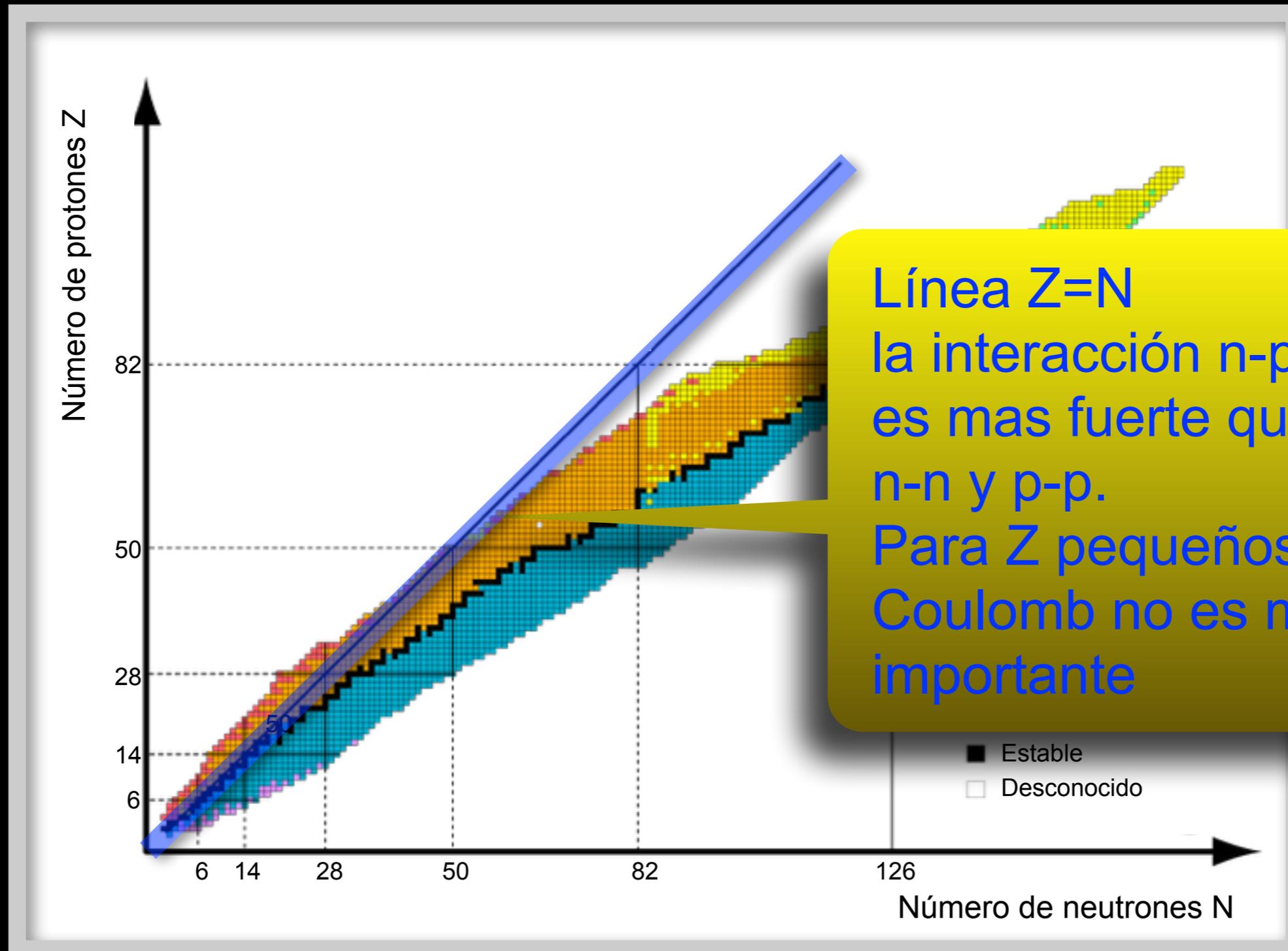
Neutrón (carga= 0)

Análisis de la Tabla de Núclidos

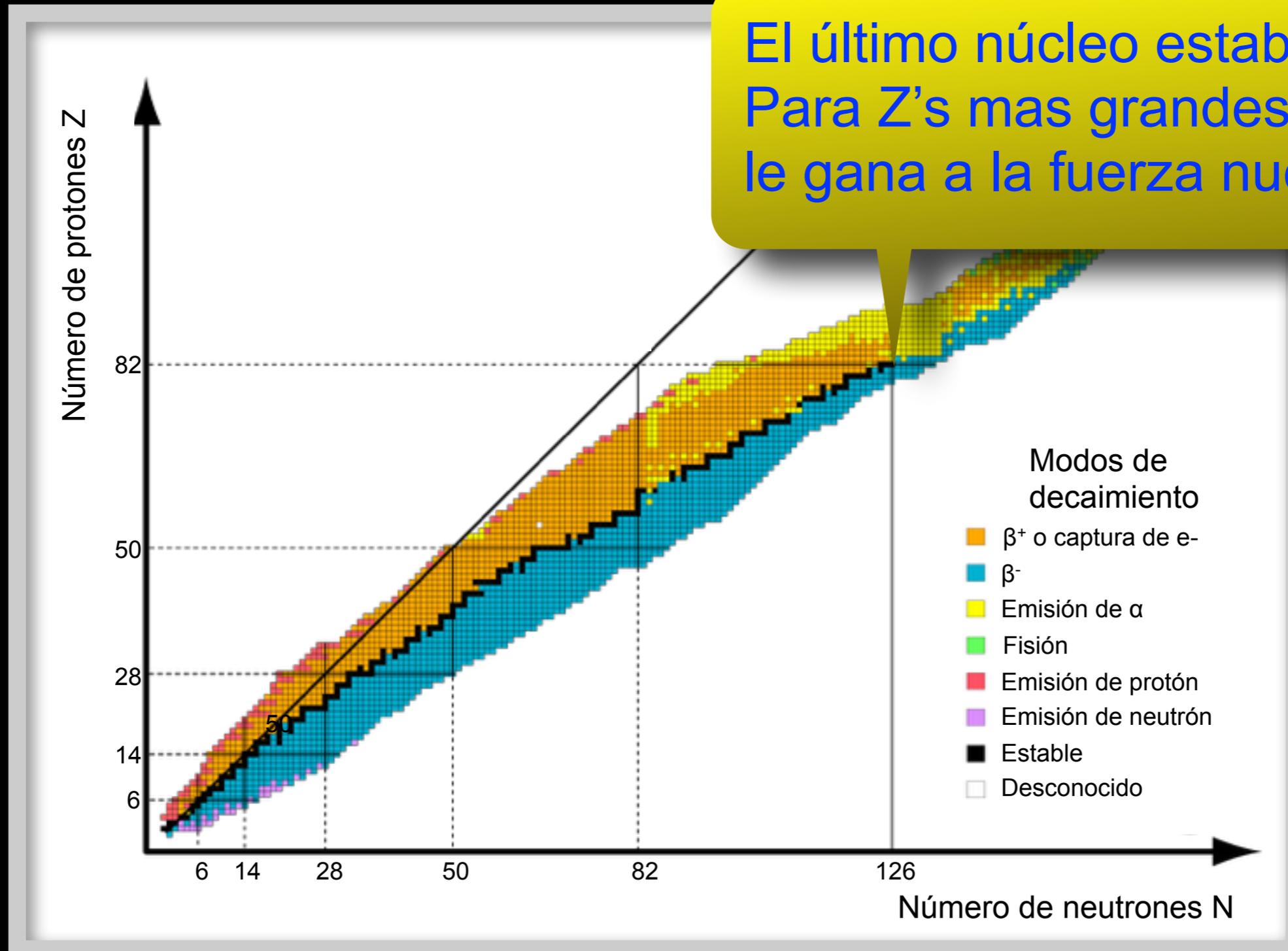


El “Valle de Estabilidad”: núcleos estables, que minimizan la energía

Análisis de la Tabla de Núclidos

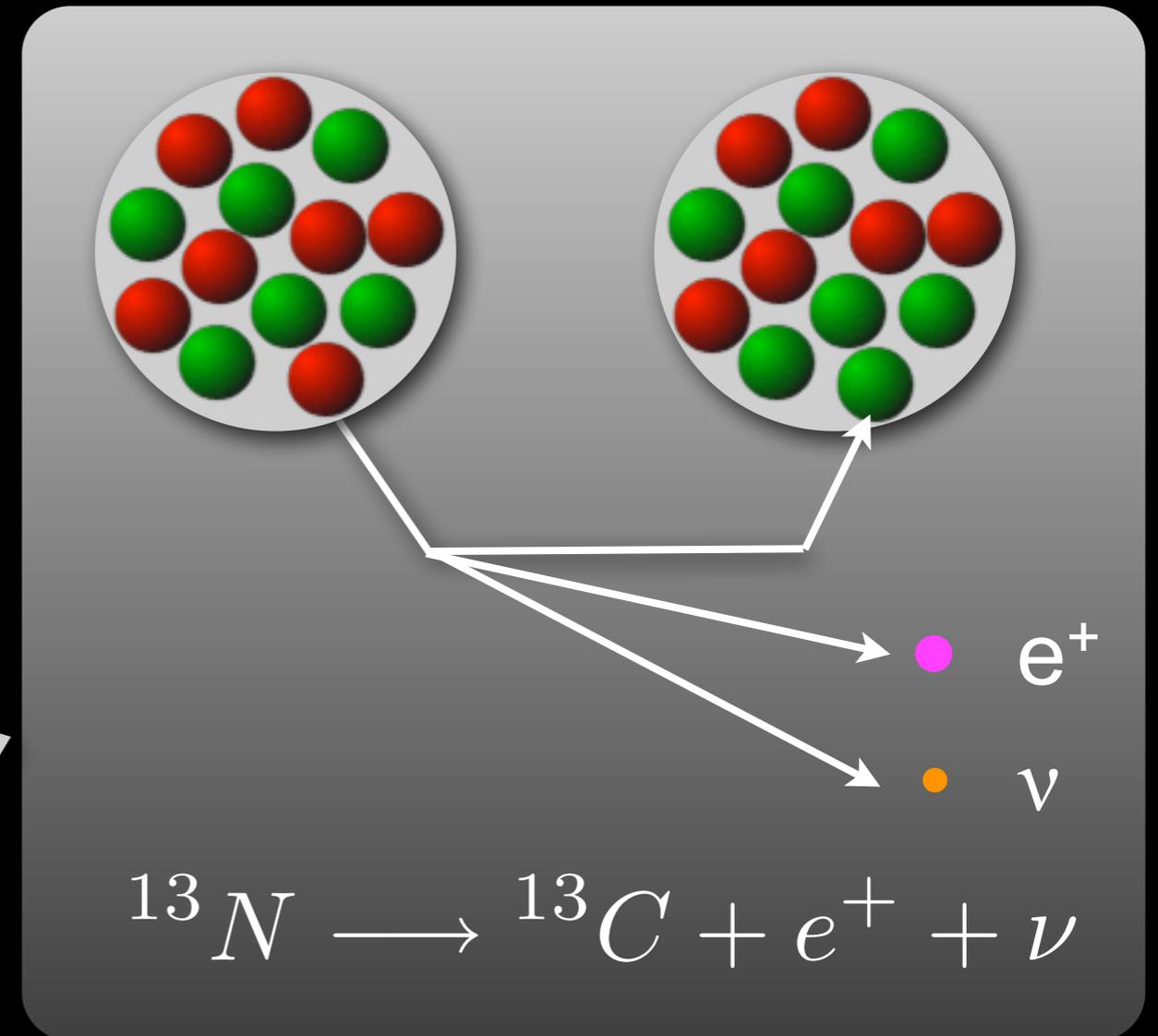
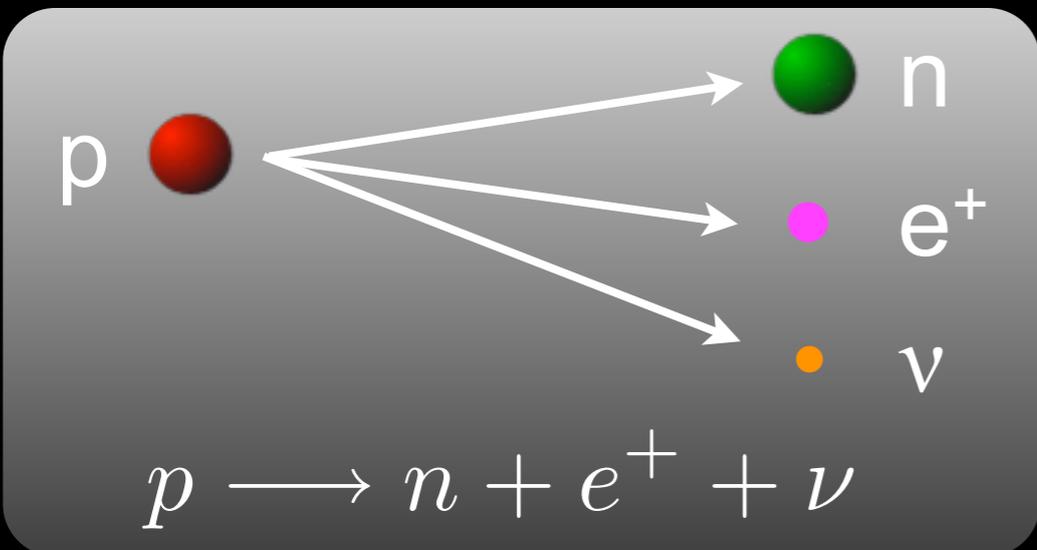
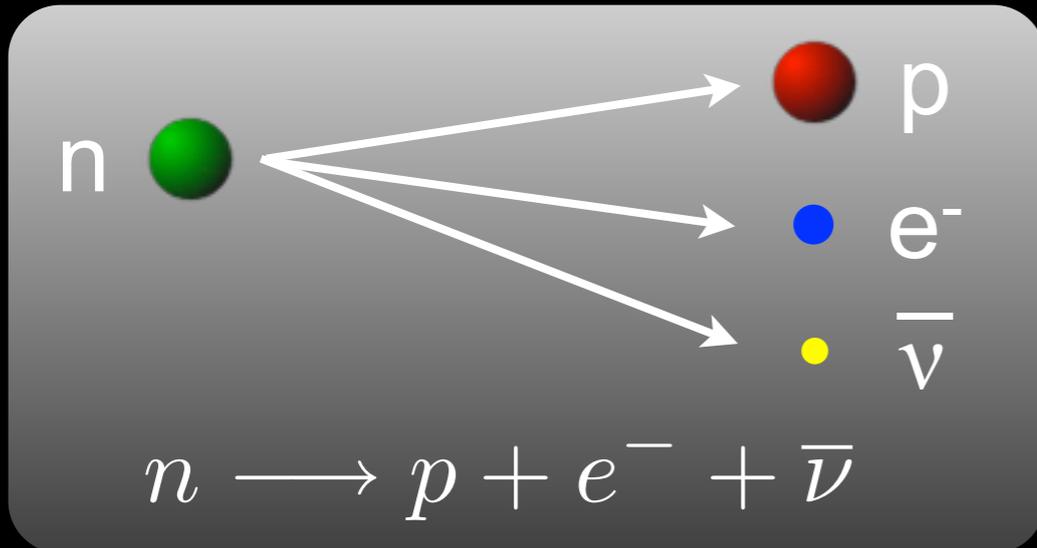


Análisis de la Tabla de Núclidos



El último núcleo estable: ^{209}Bi
 Para Z's mas grandes Coulomb
 le gana a la fuerza nuclear.

El decaimiento beta y su inverso: β^- y β^+



El decaimiento β : cambia la carga Z , no cambia A , emite un ν o $\bar{\nu}$

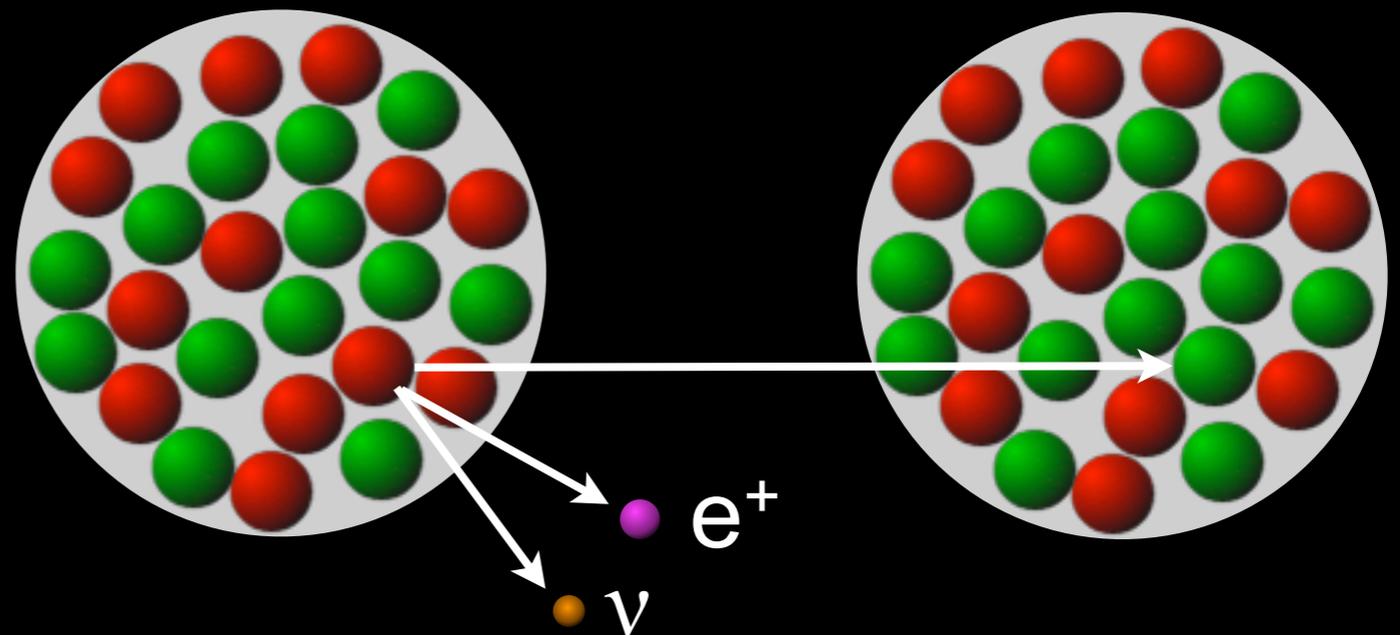
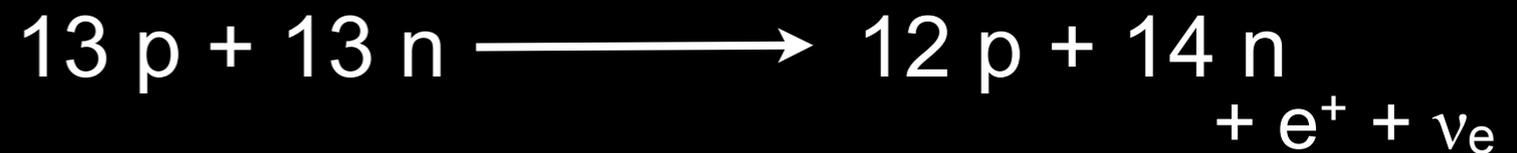
Decaimiento Beta del Aluminio 26 en Magnesio 26

Aluminio: $Z=13$

^{27}Al : estable

^{26}Al : decae en ^{26}Mg

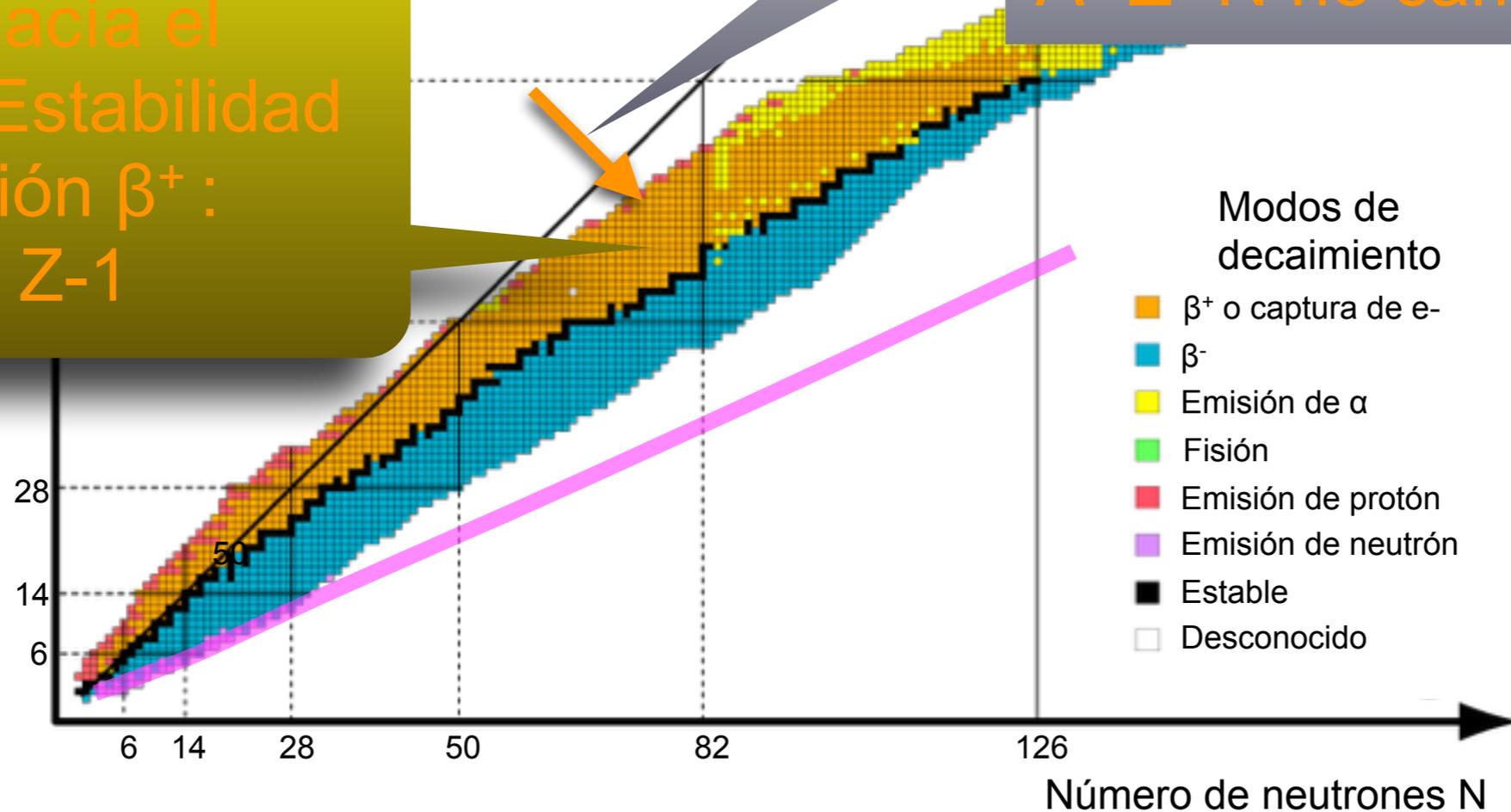
$\tau_{1/2} = 7.17 \times 10^5$ años



Análisis de la Tabla de Núclidos

Núcleos inestables por decaimiento β^+ :
decaen hacia el Valle de Estabilidad
con emisión β^+ :
 $Z \rightarrow Z-1$

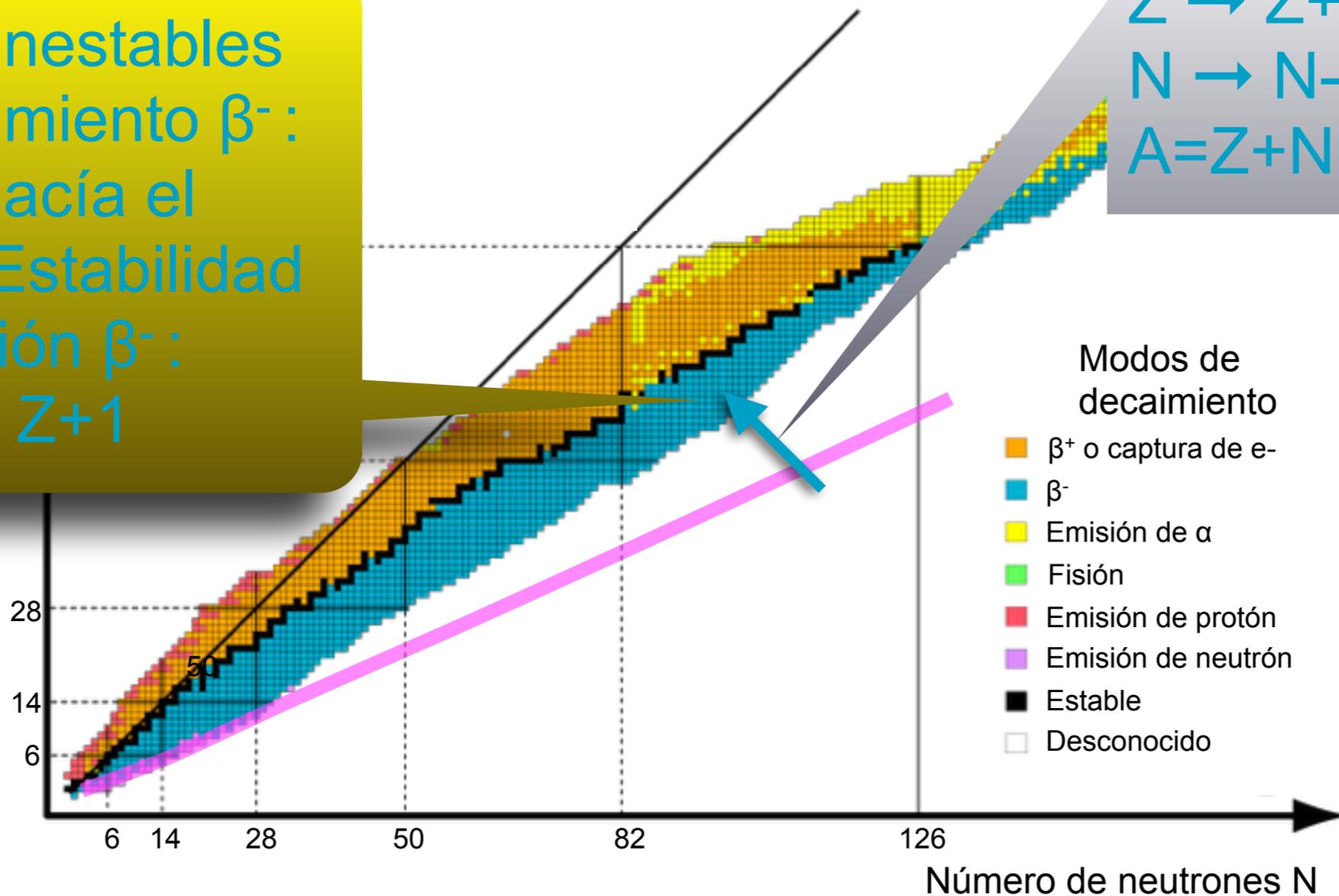
Decaimiento β^+ :
 $Z \rightarrow Z-1$
 $N \rightarrow N+1$
 $A=Z+N$ no cambia



Análisis de la Tabla de Núclidos

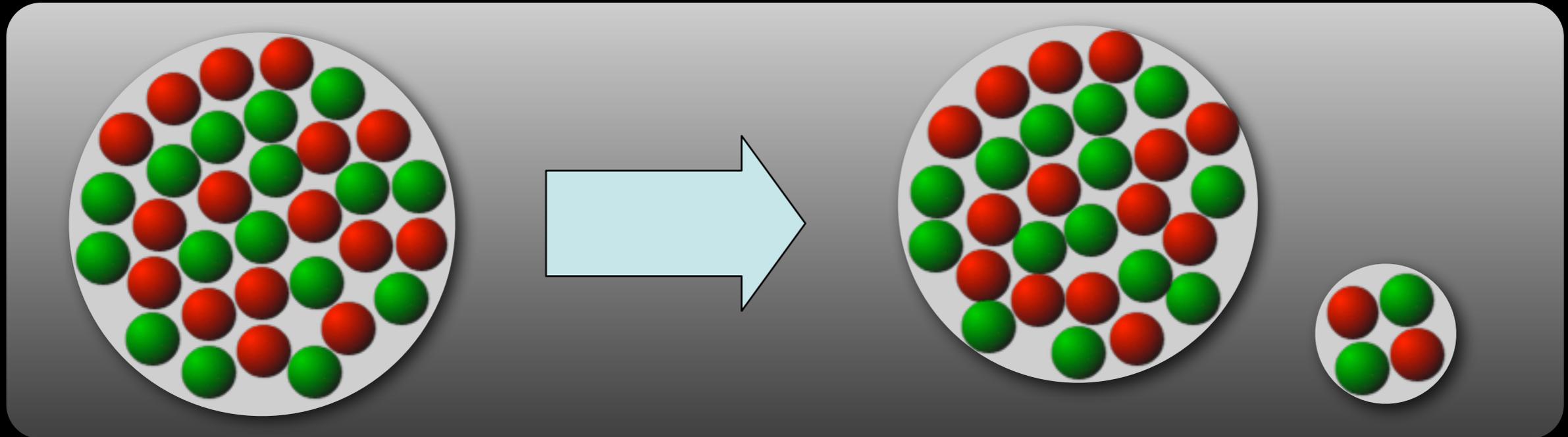
Núcleos inestables por decaimiento β^- : decaen hacia el Valle de Estabilidad con emisión β^- : $Z \rightarrow Z+1$

Decaimiento β^- :
 $Z \rightarrow Z+1$
 $N \rightarrow N-1$
 $A=Z+N$ no cambia

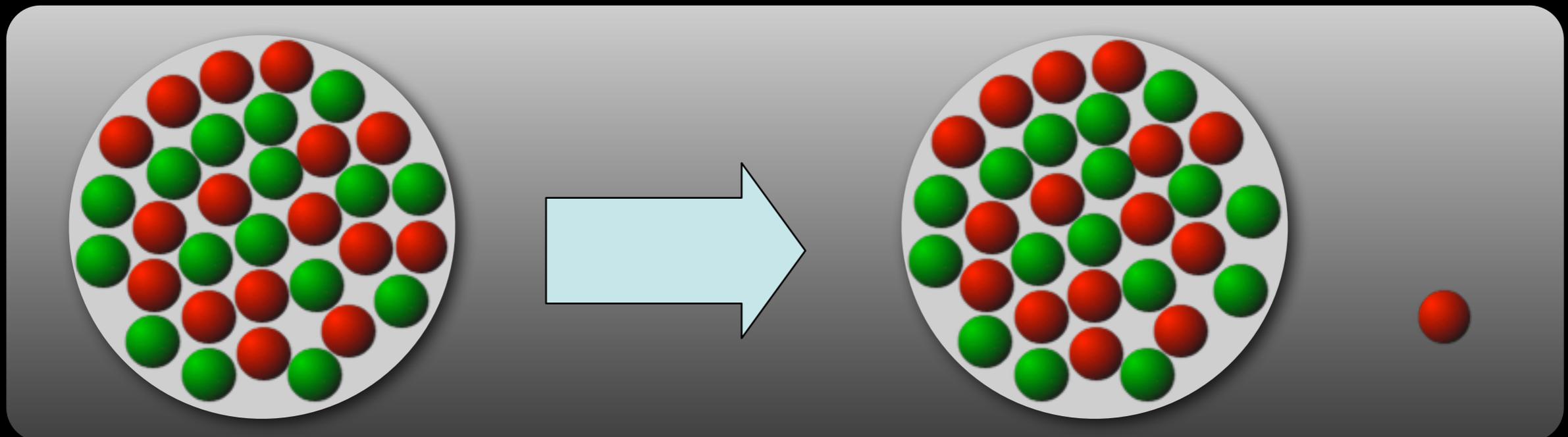


Emisión de α , protón y neutrón

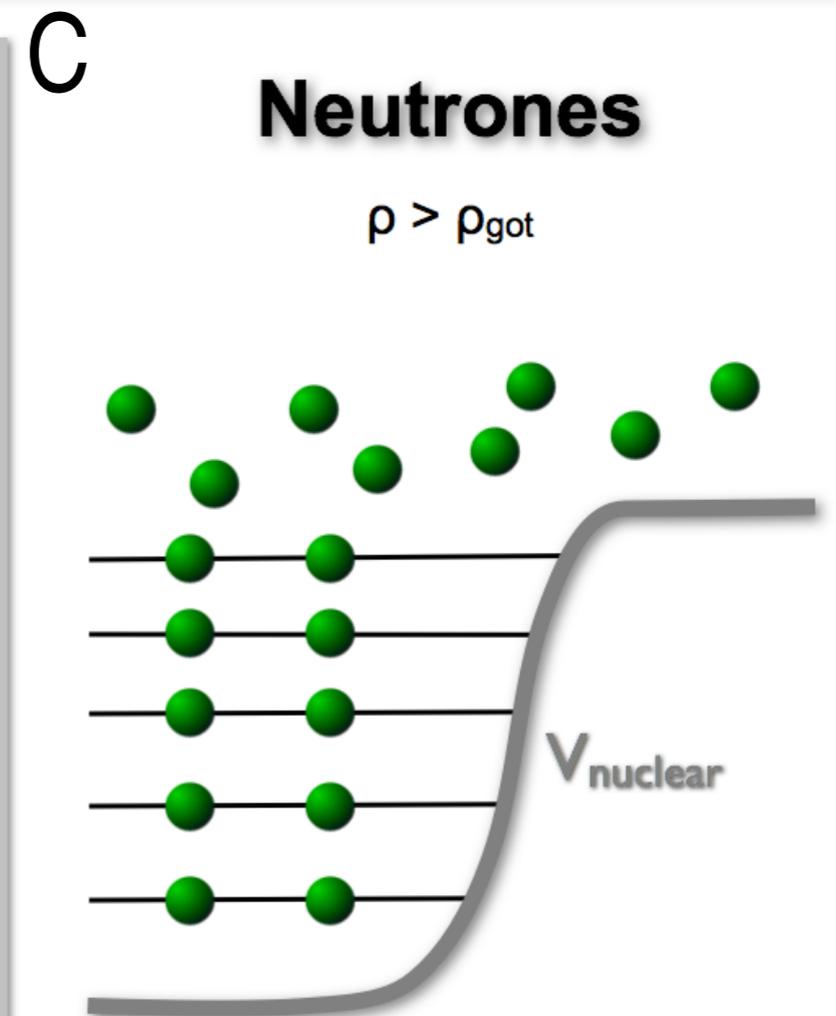
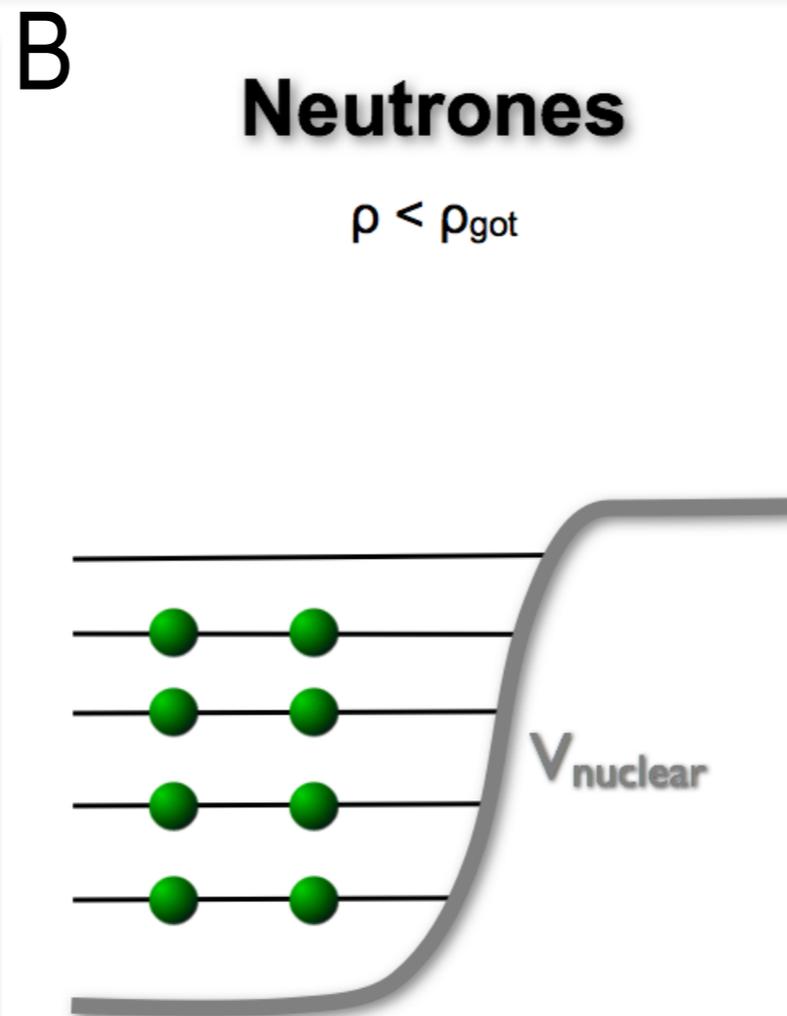
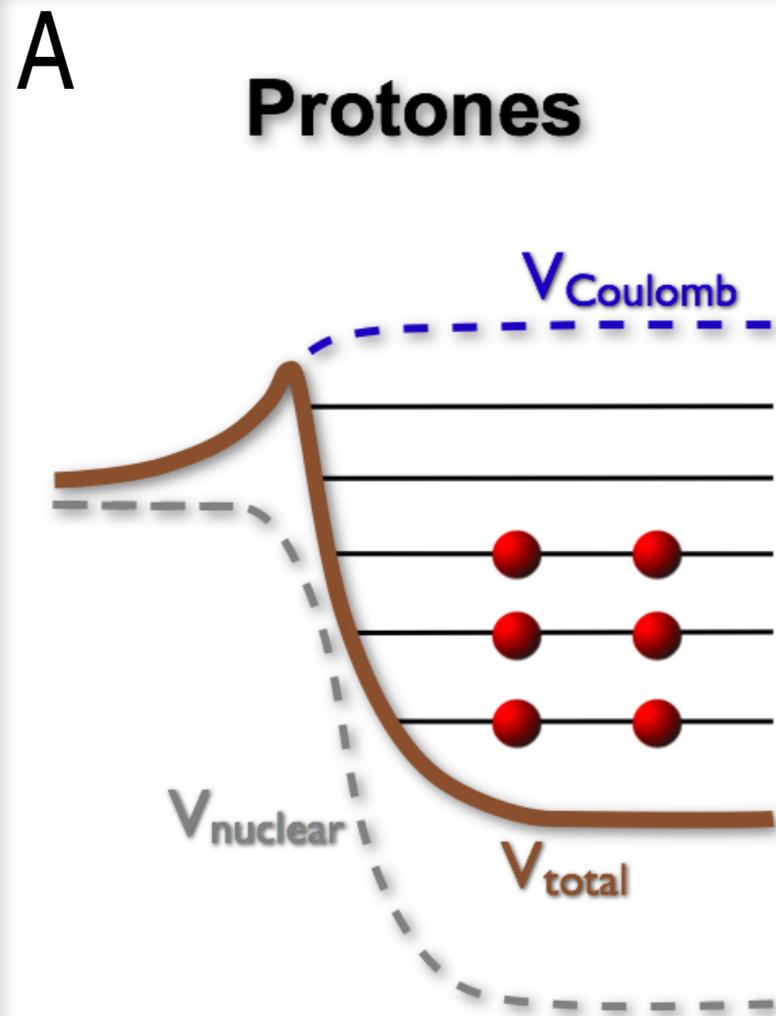
Emisión α : $A \rightarrow A-4$ $Z \rightarrow Z-2$ $N \rightarrow N-2$ (α = núcleo de 4He)



Emisión de protón o neutrón: $A \rightarrow A-1$ $Z \text{ o } N \rightarrow Z-1 \text{ o } N-1$



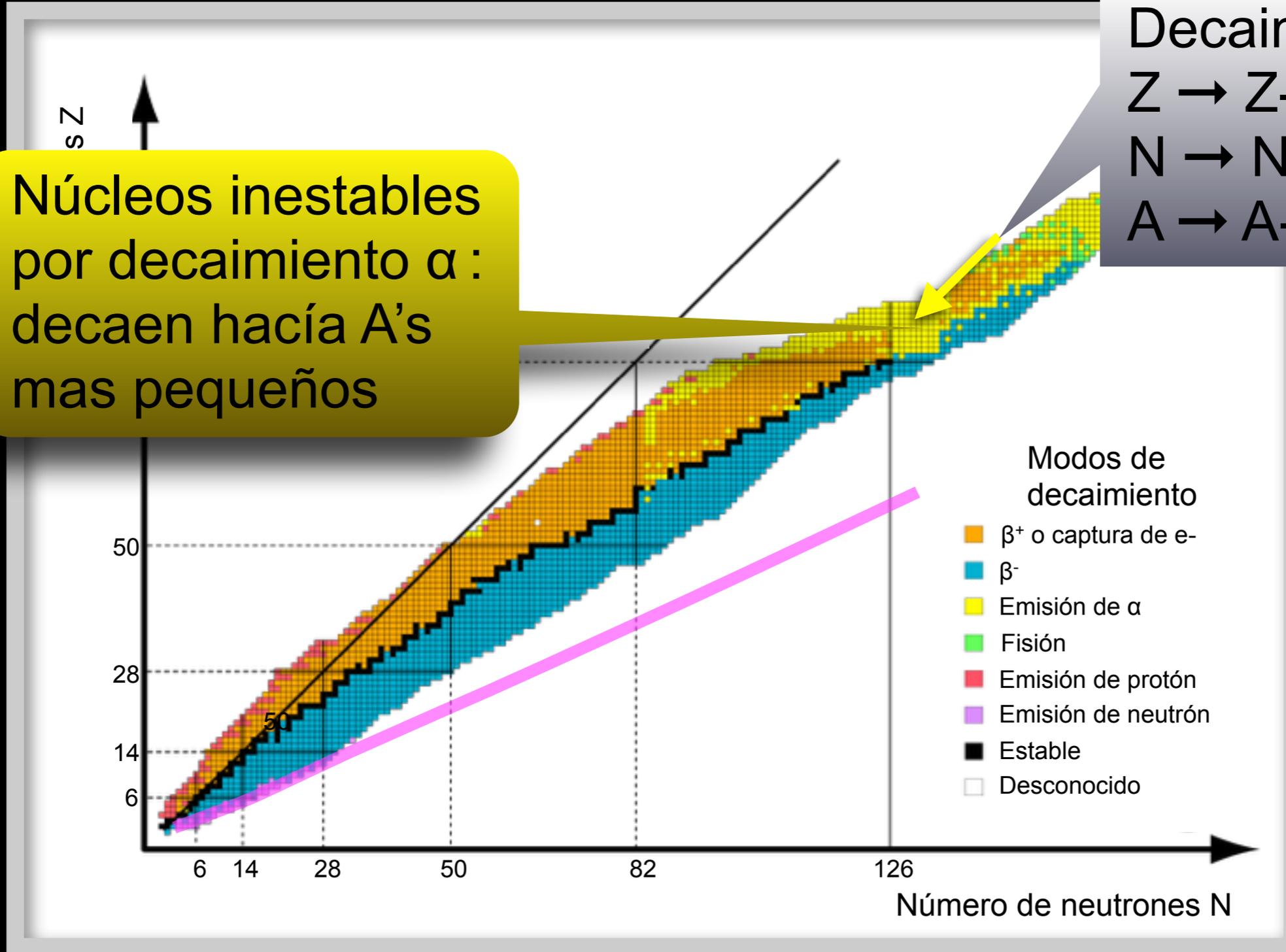
Neutrones/Protones en un Potencial Nuclear



Análisis de la Tabla de Núclidos

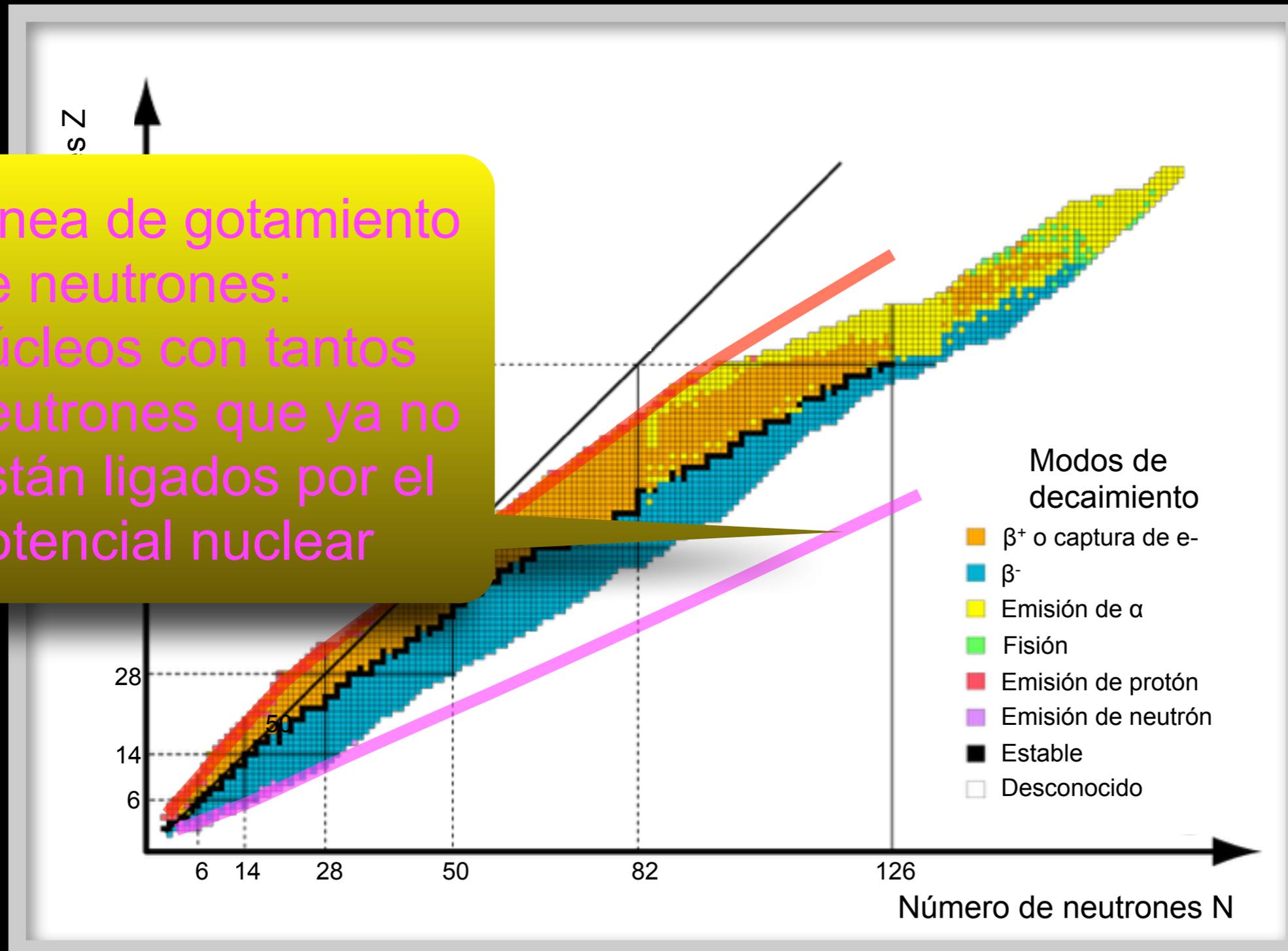
Núcleos inestables por decaimiento α : decaen hacia A's mas pequeños

Decaimiento α :
 $Z \rightarrow Z-2$
 $N \rightarrow N-2$
 $A \rightarrow A-4$

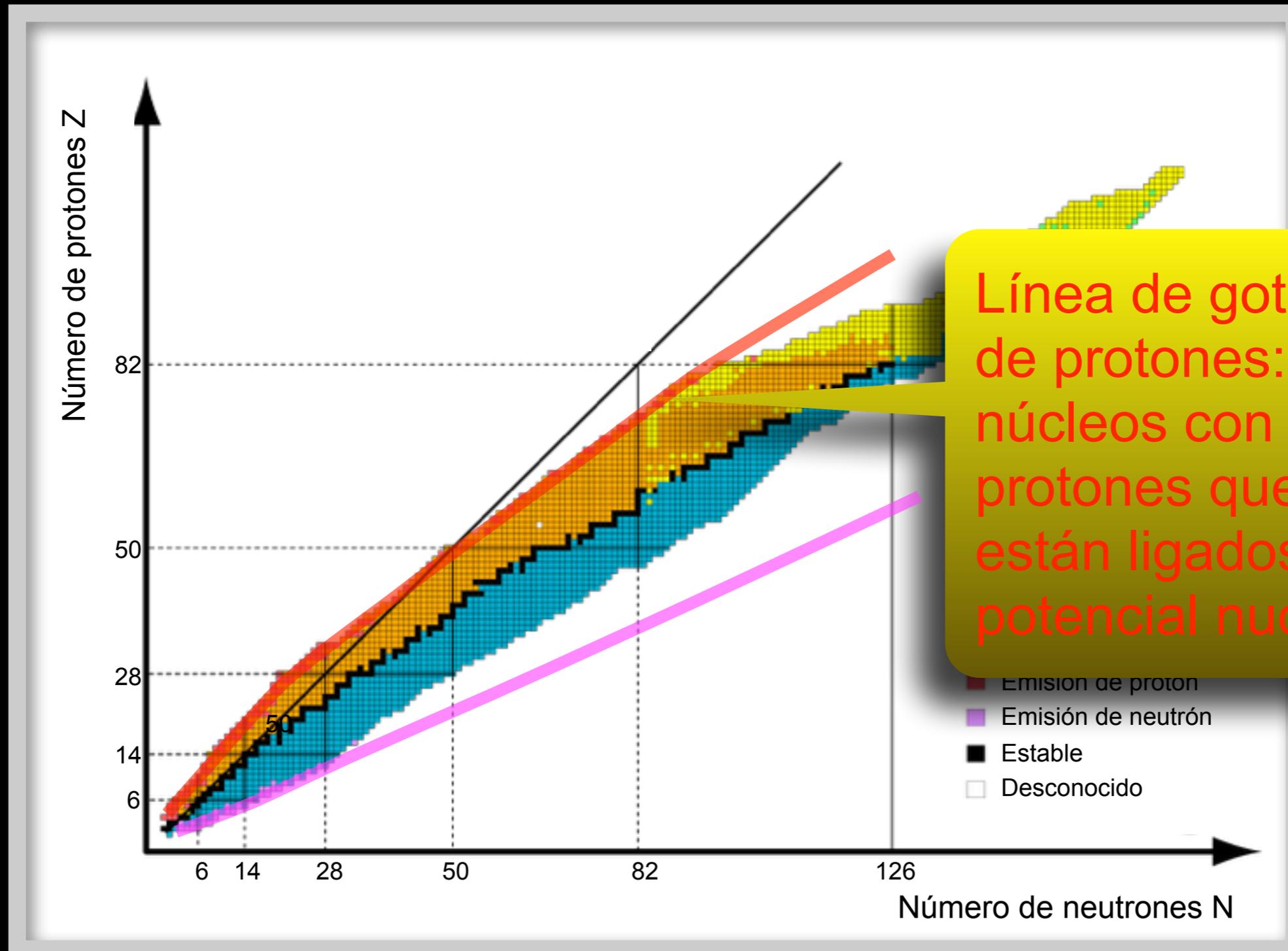


Análisis de la Tabla de Núclidos

Línea de gotamiento de neutrones:
núcleos con tantos neutrones que ya no están ligados por el potencial nuclear

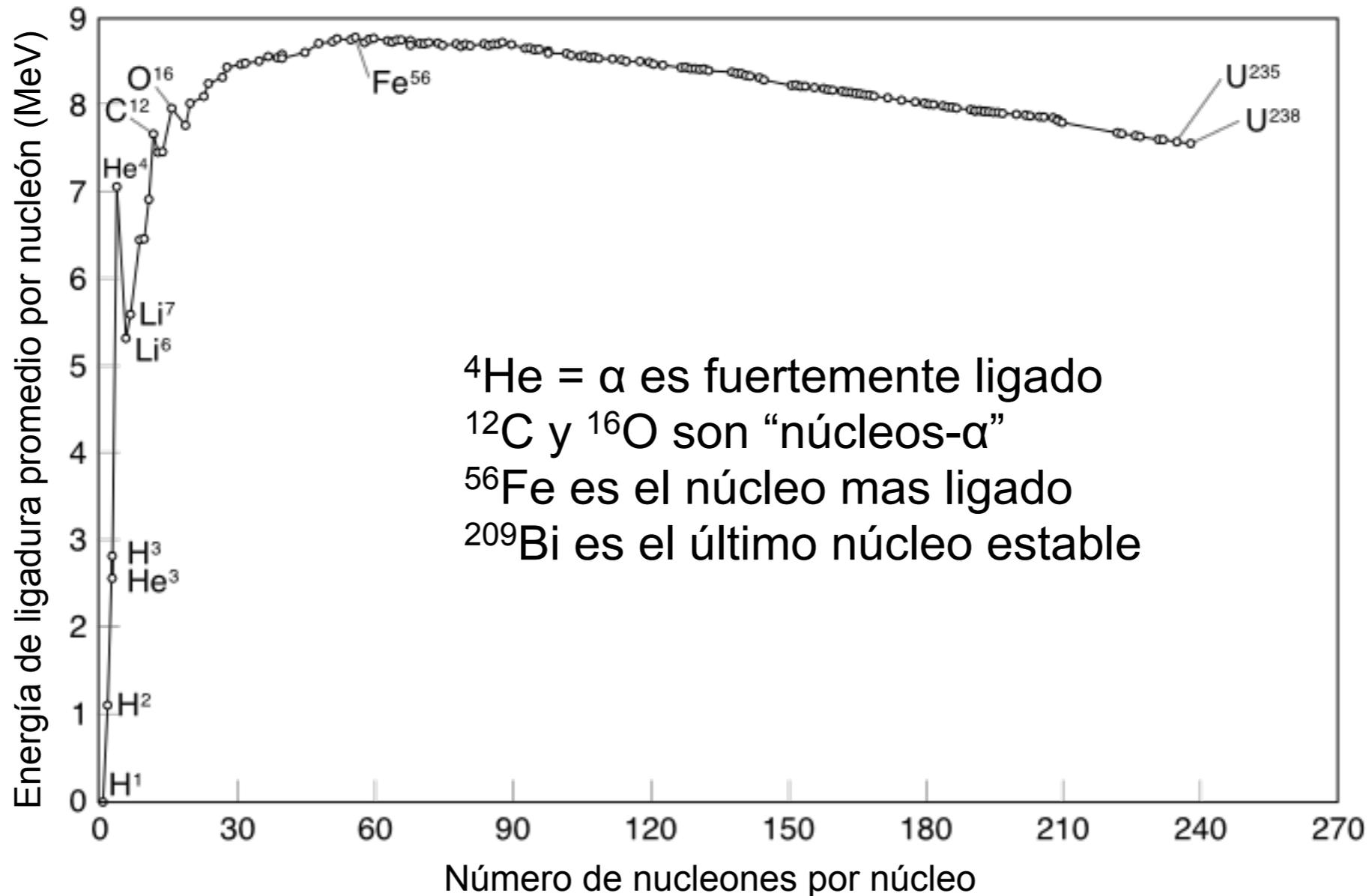


Análisis de la Tabla de Núclidos



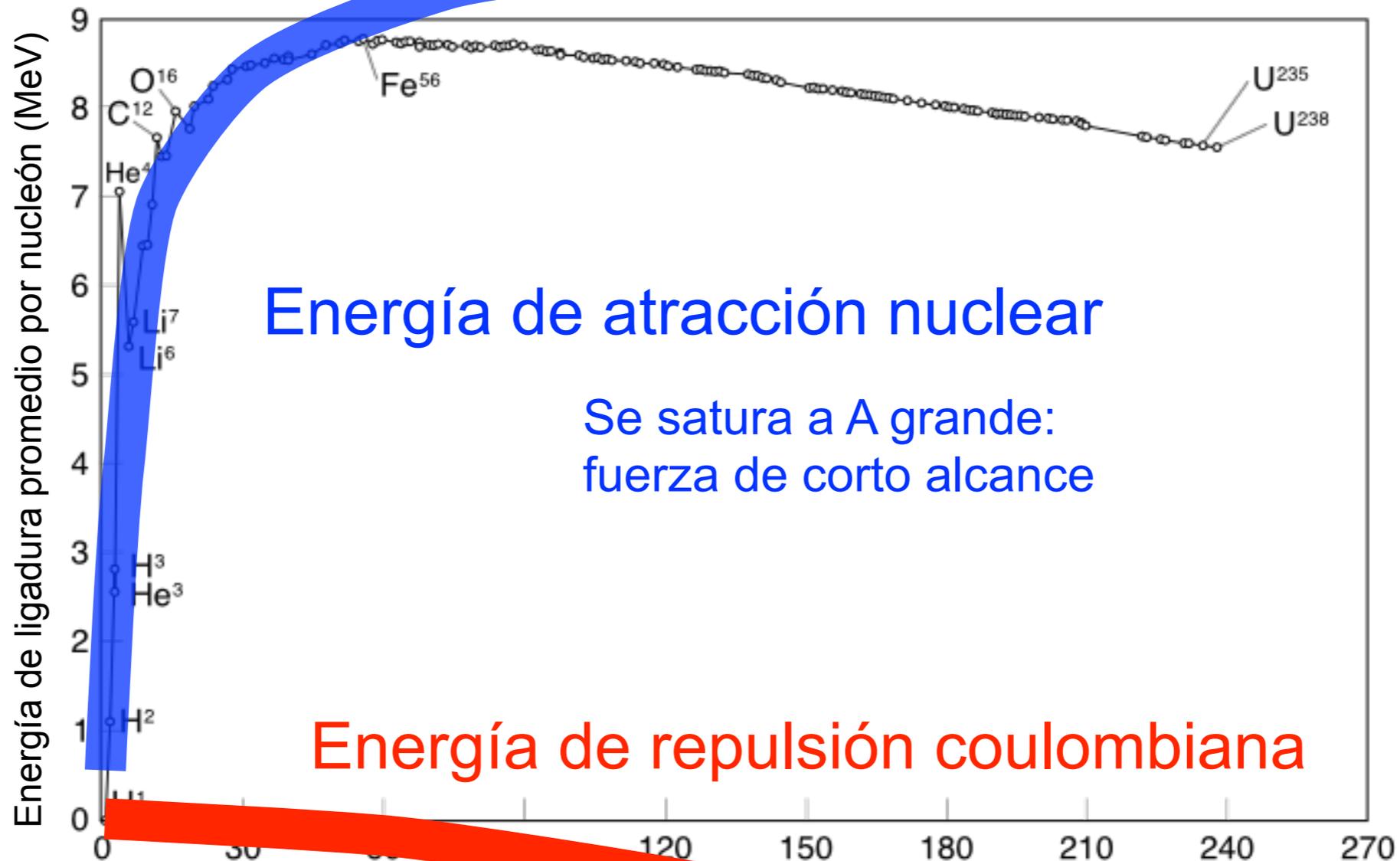
Línea de gotamiento de protones: núcleos con tantos protones que ya no están ligados por el potencial nuclear

Energías de Ligadura de los Núcleos



Fusión de núcleos ligeros hacia núcleos pesados libera energía hasta alcanzar el ^{56}Fe : el hierro marca el fin de la nucleosíntesis estelar exotérmica

Energía de ligadura de los núcleos



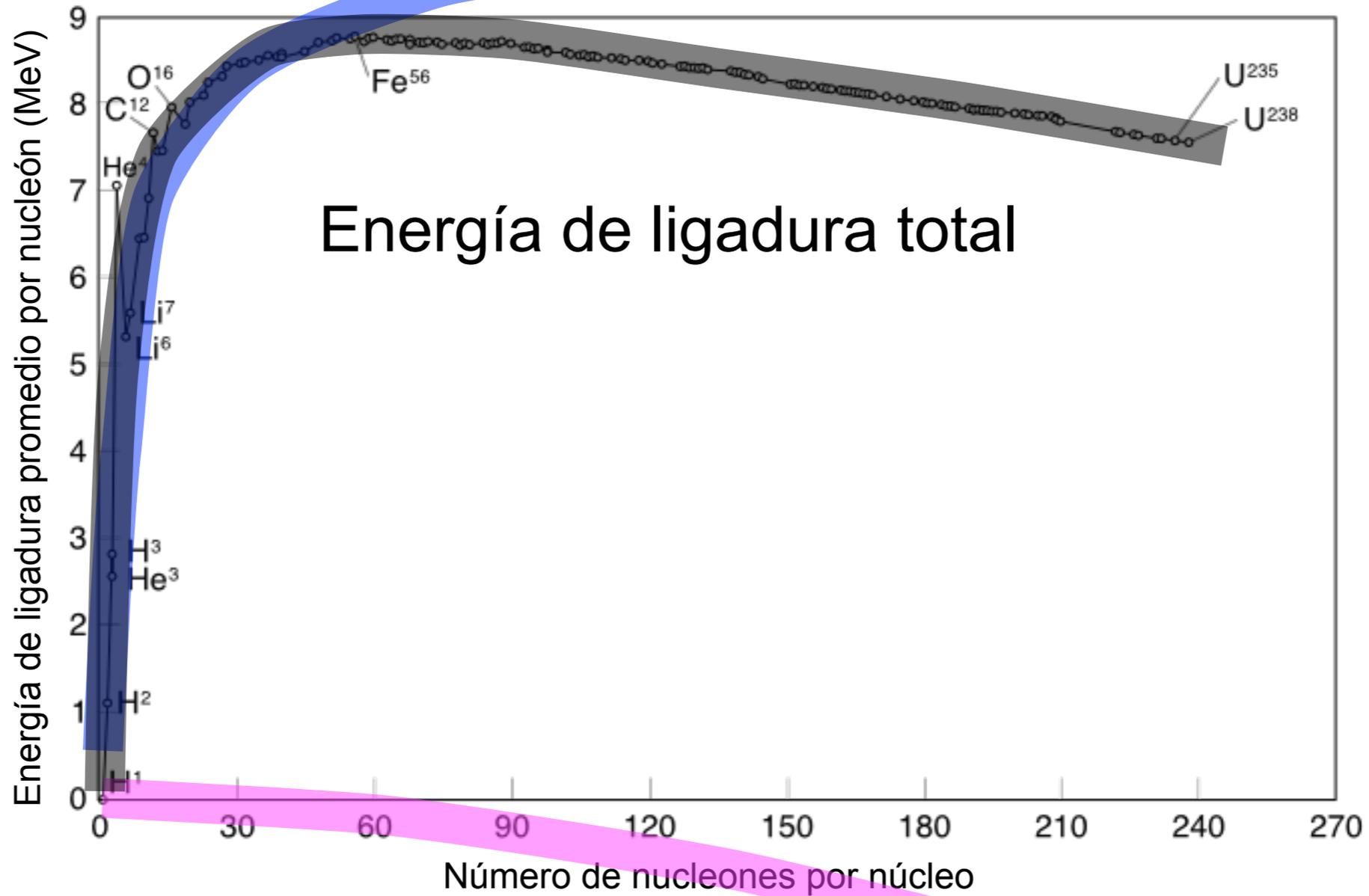
Energía de atracción nuclear

Se satura a A grande:
fuerza de corto alcance

Energía de repulsión coulombiana

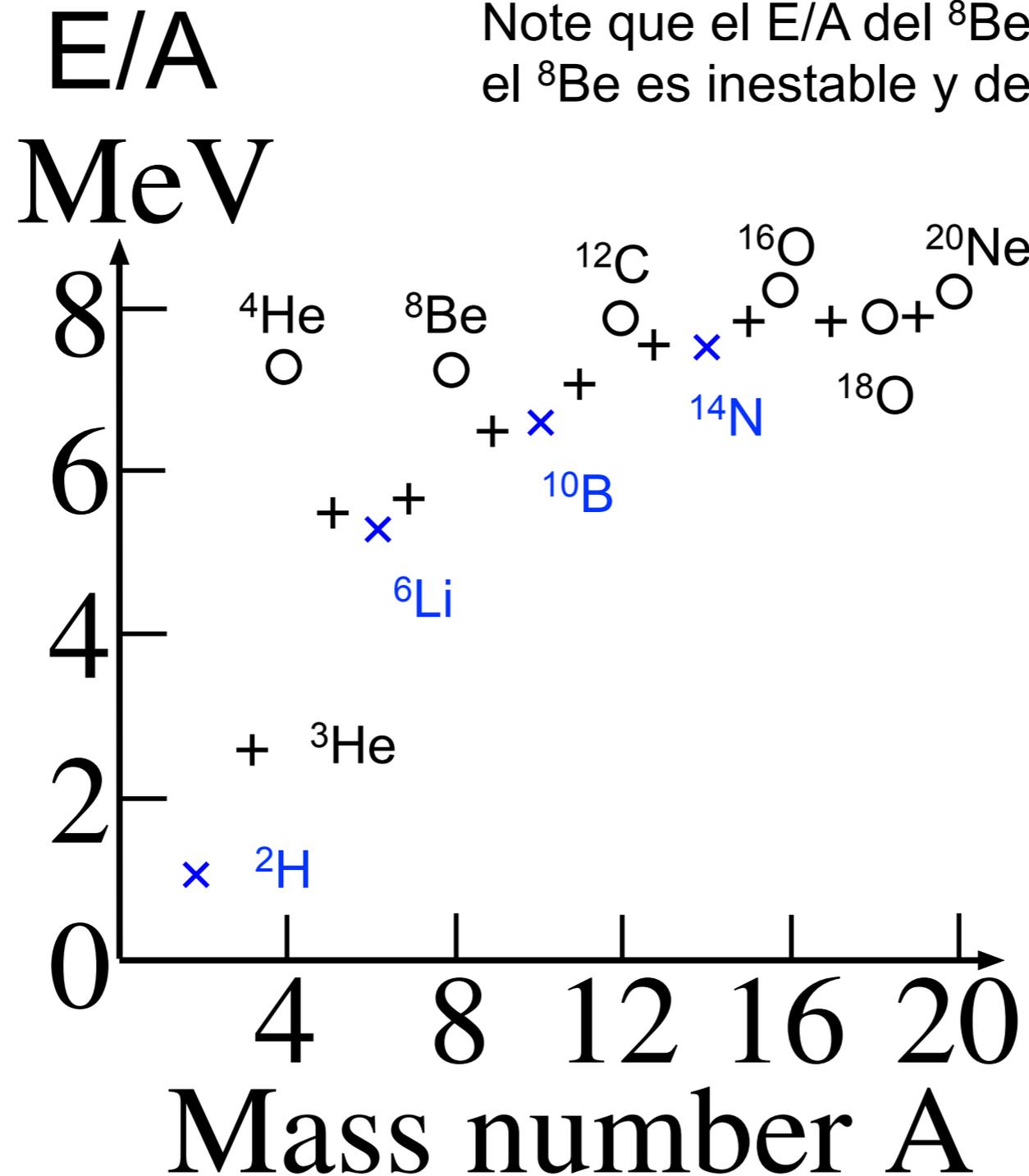
NO se satura a Z grande: Número de nucleones por núcleo
fuerza de largo alcance: $1/r^2$

Energía de ligadura de los núcleos



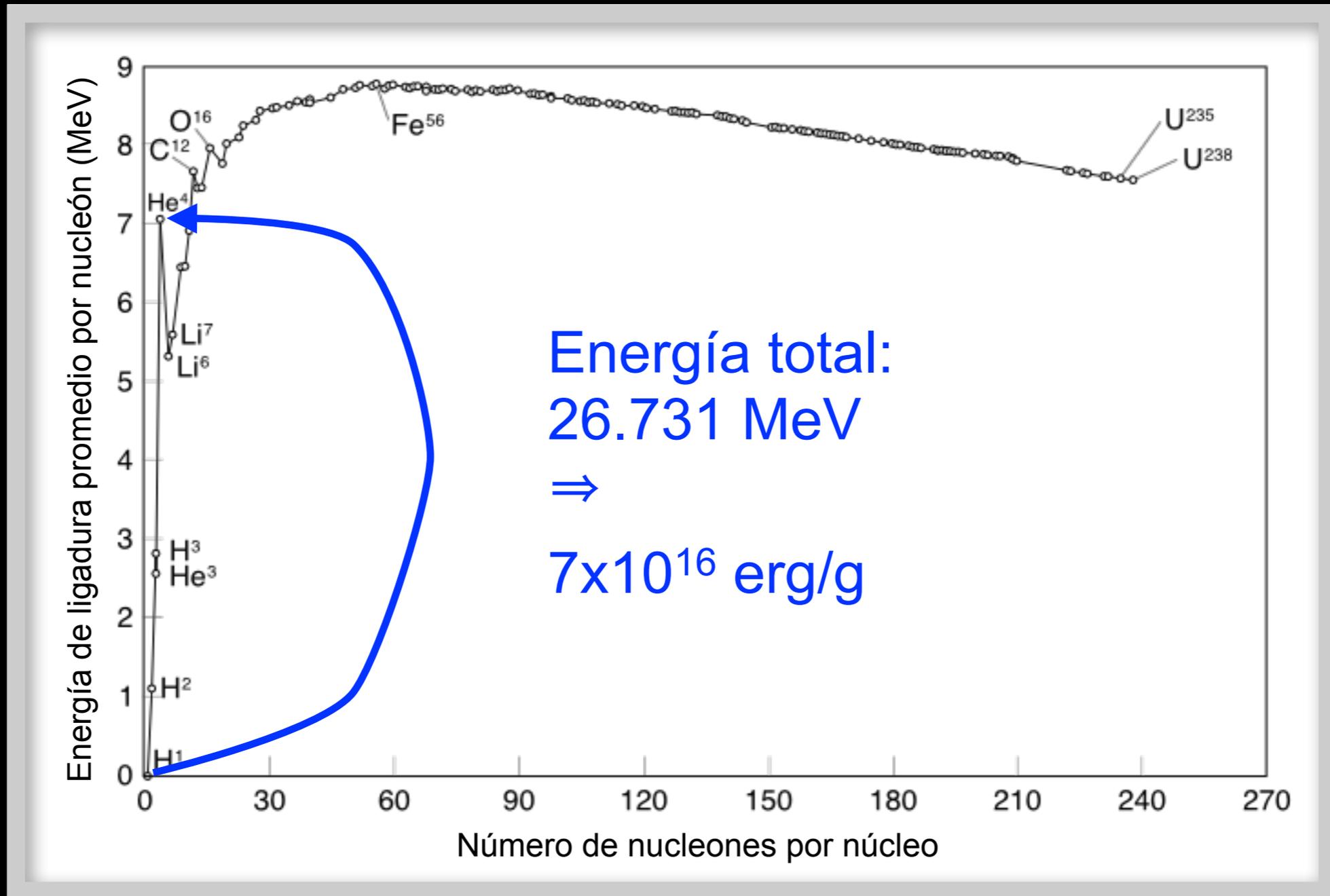
Energía de ligadura de los núcleos

Note los únicos 4 núcleos impar-impar estables:
 ${}^2\text{H}(1\text{p},1\text{n})$, ${}^6\text{Li}(3\text{p},3\text{n})$, ${}^{10}\text{B}(5\text{p},5\text{n})$ y ${}^{14}\text{N}(7\text{p},7\text{n})$

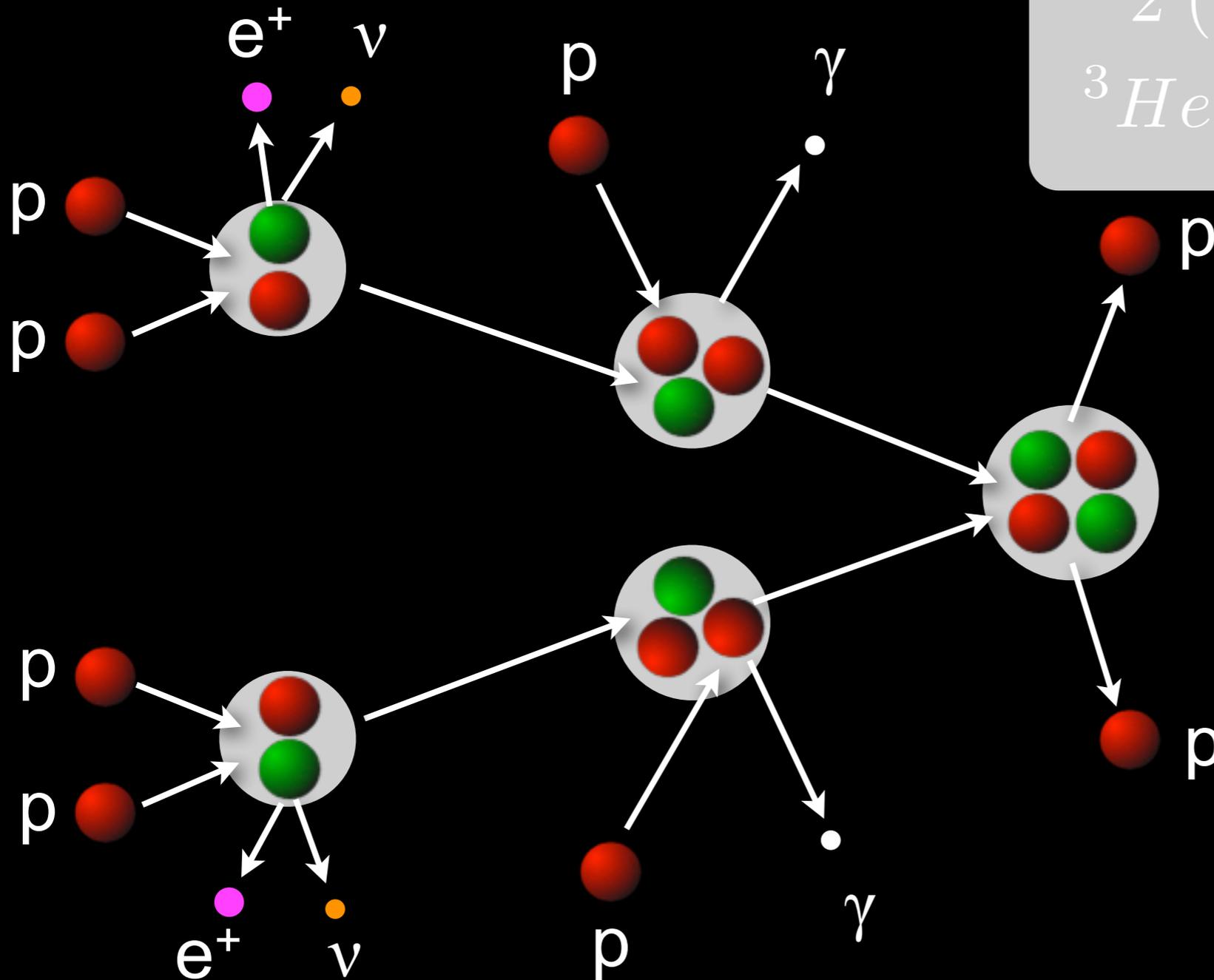
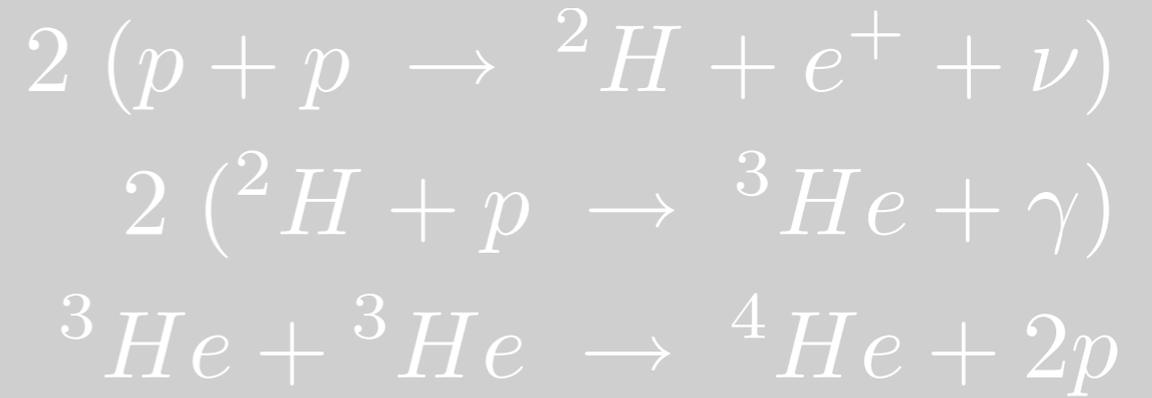


REACCIONES NUCLEARES y EVOLUCIÓN ESTELAR

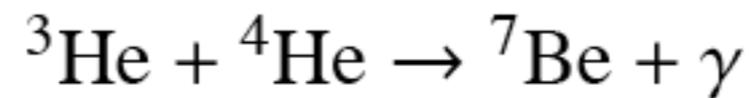
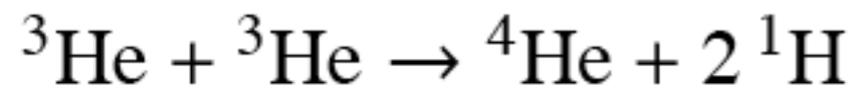
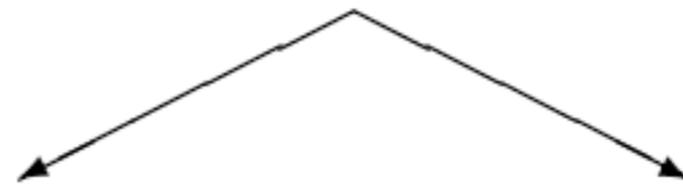
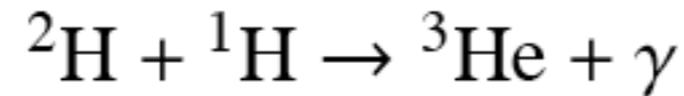
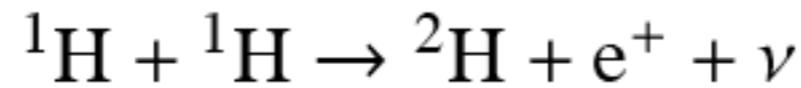
Quemado de Hidrógeno a Helio



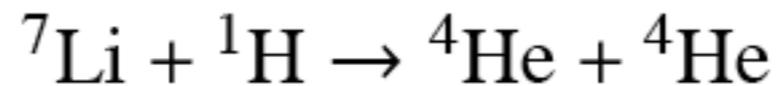
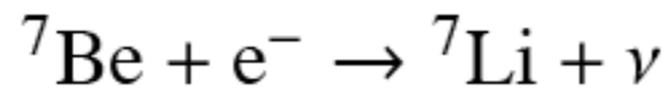
$4\ ^1\text{H} \rightarrow\ ^4\text{He}$: la cadena pp



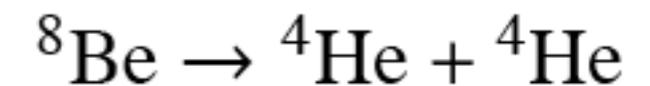
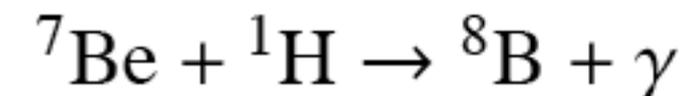
$4\ ^1\text{H} \rightarrow\ ^4\text{He}$: la cadena pp



pp1



pp2



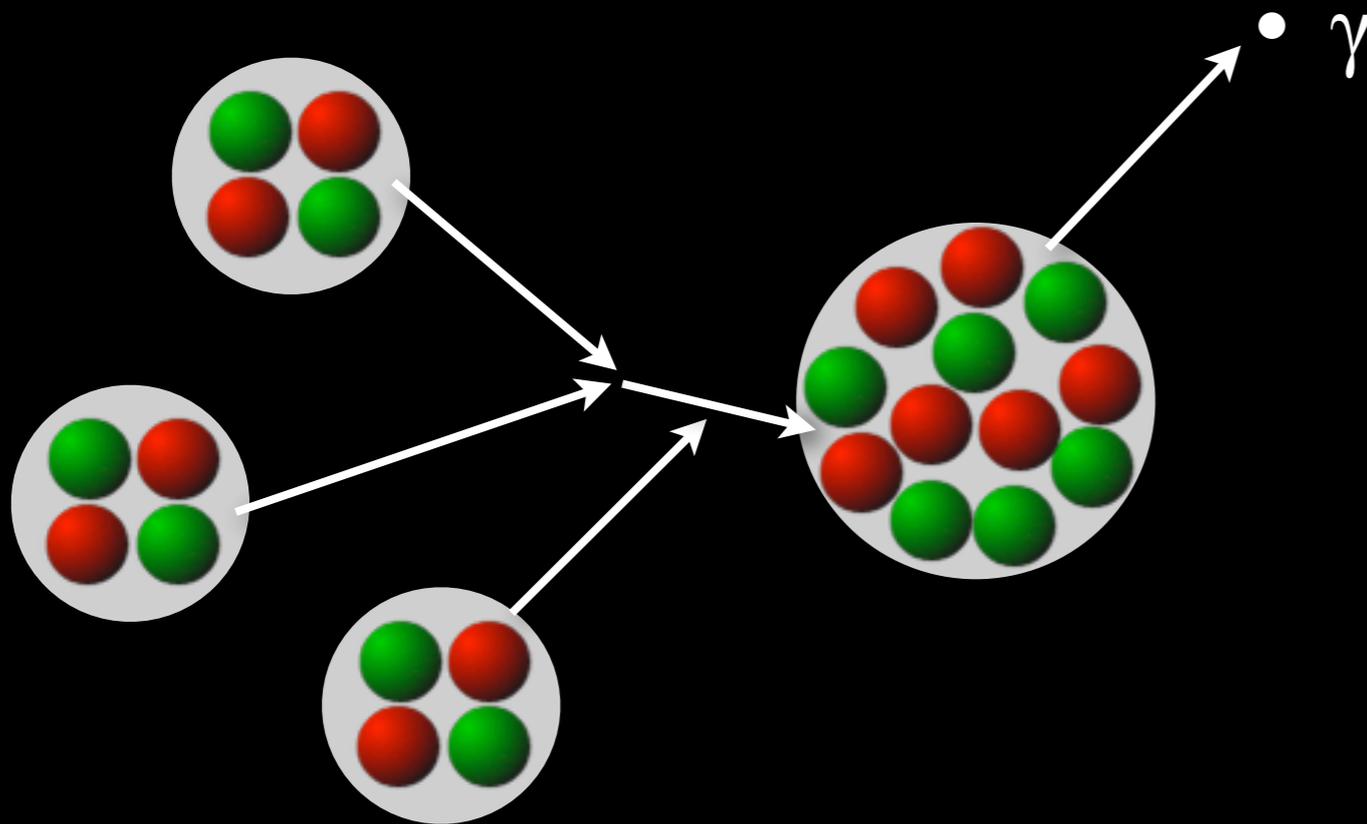
pp3



es la reacción mas lenta
y es la que controla la tasa

Quemado de He: $3^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C}$ (Triple α)

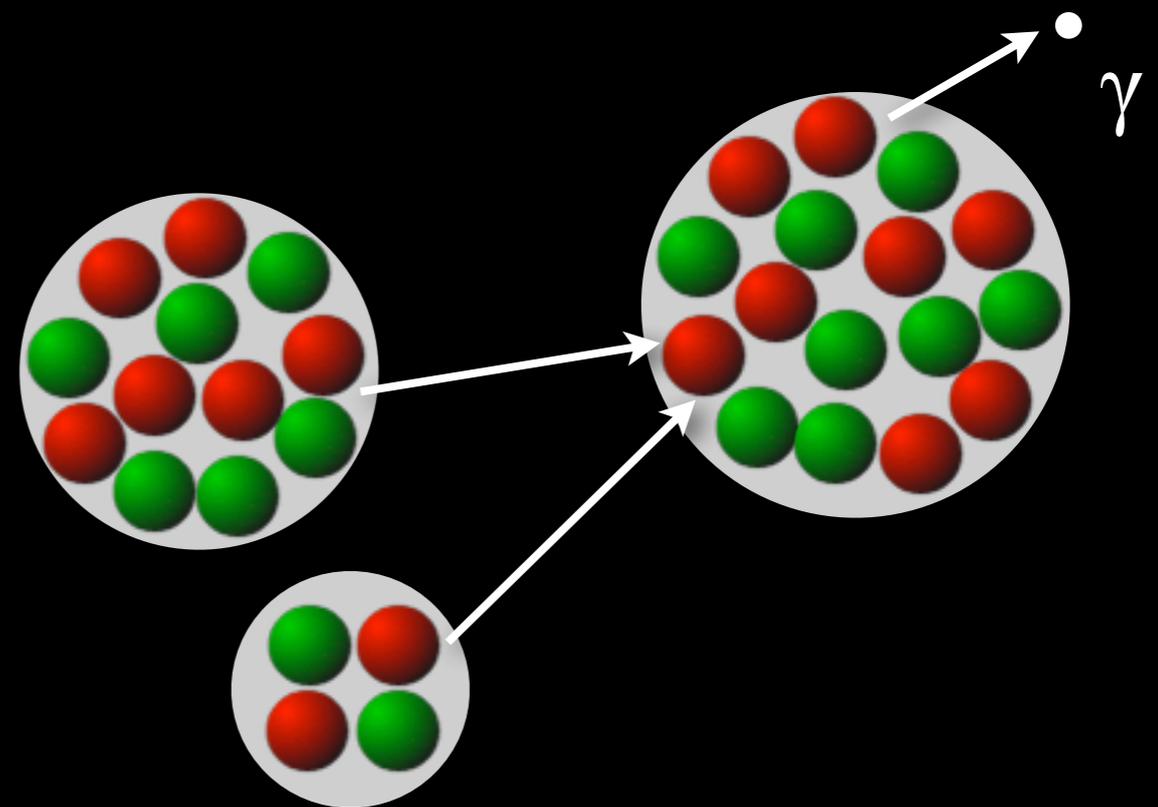
La reacción "triple alfa"



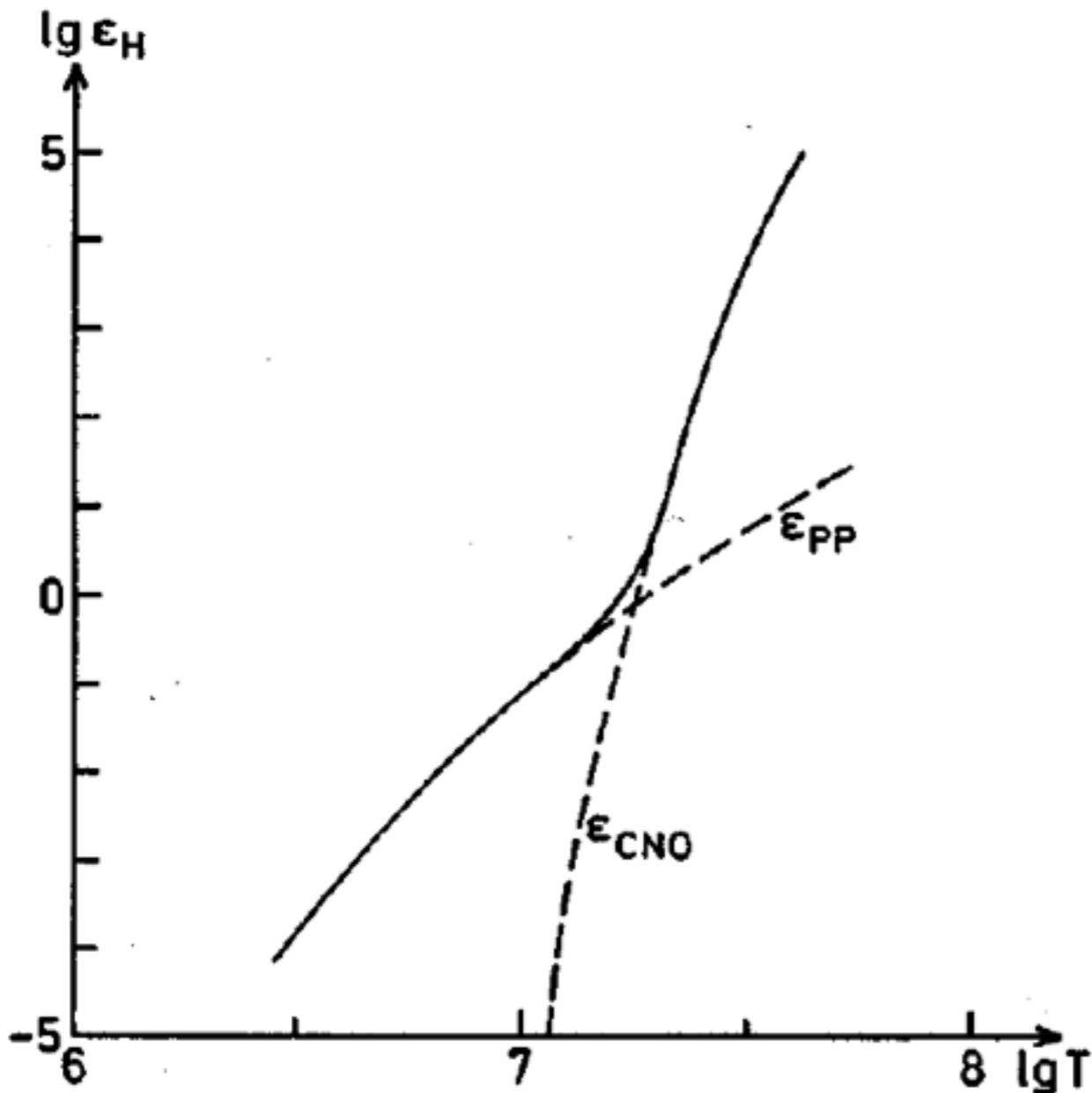
seguido de



posiblemente seguido de
la reacción "carbon-alfa"



Tasa de Energía por Quemado de H



El ciclo CNO requiere mas altas temperaturas: mas repulsión coulombiana ($Z=6, 7, \text{ y } 8$). A alta y vencido Coulomb, las conversiones $p \rightarrow n$ se obtienen automaticamente por los decaimientos β^+ de ^{13}C y ^{15}N

En la cadena pp la primera conversión $p \rightarrow n$:
 $^1\text{H} + ^1\text{H} \rightarrow ^2\text{H} + e^+ + \nu$
 es muy lenta

Figure 6.5. Total energy generation rate ϵ_{H} (in $\text{erg g}^{-1} \text{s}^{-1}$) for hydrogen burning as a function of temperature, for $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ and abundances $X = 1$ and $X_{\text{CNO}} = 0.01$. The dashed curves show the contributions of the pp chain and the CNO cycle. Figure from KIPPENHAHN.

Principales Procesos Nucleares

Combustible nuclear	Proceso	T_{Umbral} 10^6 K	Producto	Energía por nucleón (MeV)
H	$p-p$	~ 4	He	6.55
H	CNO	15	He	6.25
He	3α	100	C, O	0.61
C	$C + C$	600	O, Ne, Na, Mg	0.54
O	$O + O$	1000	Mg, S, P, Si	~ 0.3
Si	Nuc. eq.	3000	Co, Fe, Ni	< 0.18

Mas avanzamos menos energía disponible hay

Mas avanzamos mas grandes $Z \Rightarrow$ se necesitan mas altas T (Coulomb)

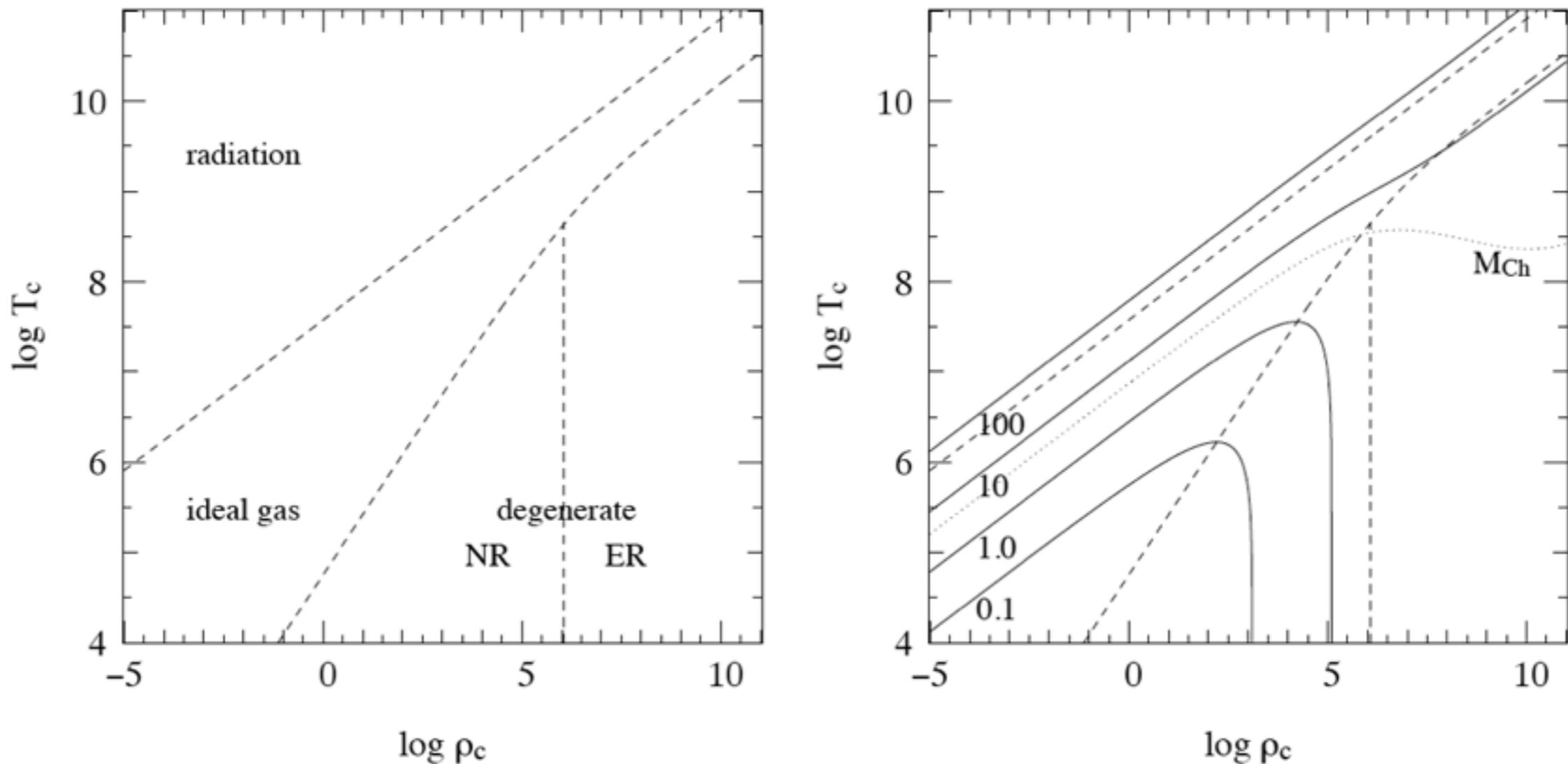
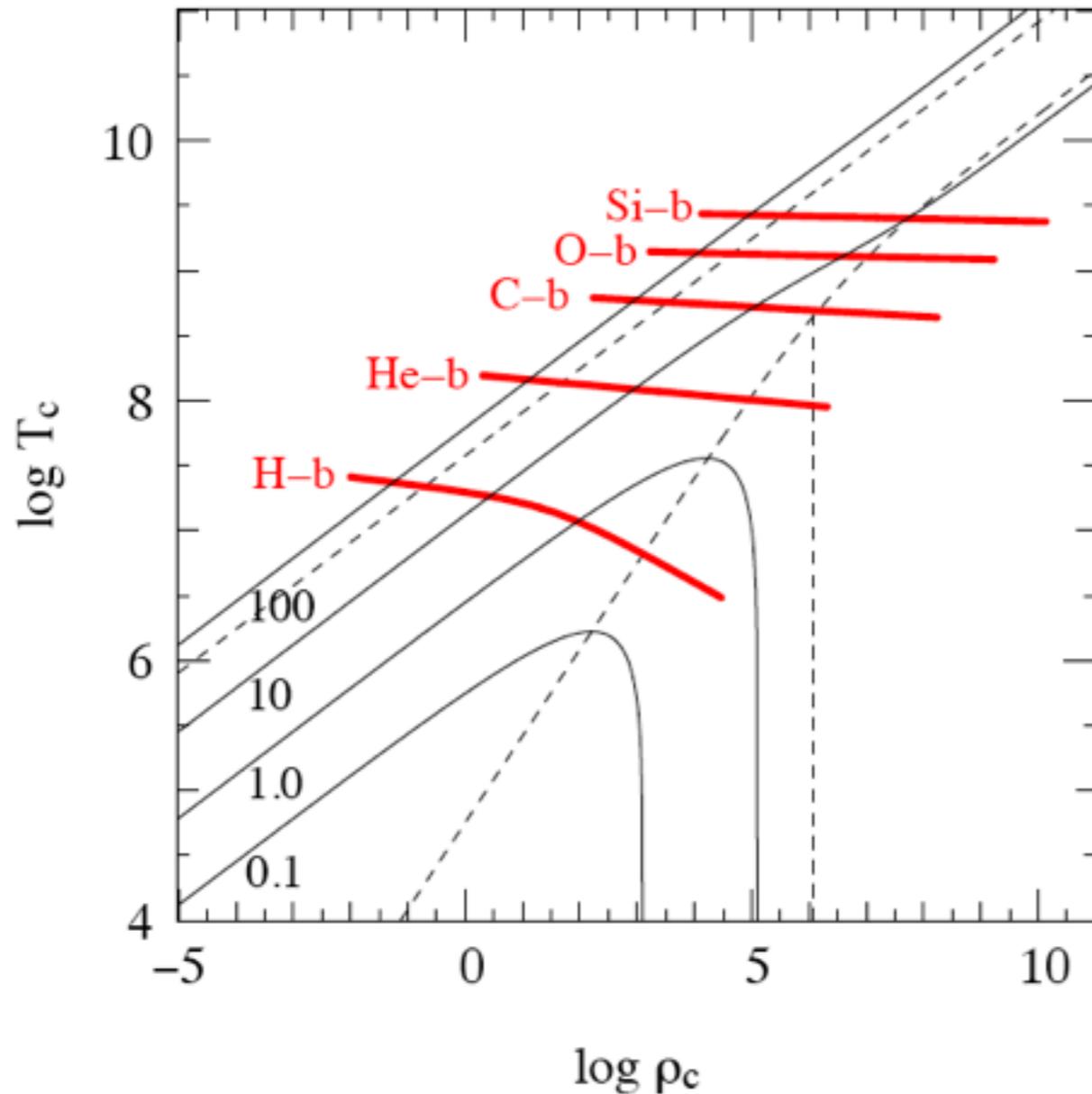


Figure 8.2. The equation of state in the $\log T_c - \log \rho_c$ plane (left panel), with approximate boundaries between regions where radiation pressure, ideal gas pressure, non-relativistic electron degeneracy and extremely relativistic electron degeneracy dominate, for a composition of $X = 0.7$ and $Z = 0.02$. In the right panel, schematic evolution tracks for contracting stars of $0.1 - 100 M_\odot$ have been added.

Evolución Esquemática en el Plano ρ - T



Líneas umbrales (approx.)
de encendido de los varios
quemados.

Figure 8.3. The same schematic evolution tracks as in Fig. 8.2, together with the approximate regions in the $\log T_c - \log \rho_c$ plane where nuclear burning stages occur.

